Übungsblatt 1

Keine Abgabe

Die Aufgaben können in der Übung votiert werden. Haben Sie eine Aufgabe votiert, dann erhalten Sie die entsprechenden Punkte. Sie müssen in der Lage sein ihre votierten Aufgaben während dem Tutorium an der Tafel zu präsentieren.

Punkte: **40**

Problem 1 - O-Notation (je 3 P)

Rekapitulieren Sie die O-Notation:

- Geben Sie eine formale Definition der Landau-Symbole.
- Beschreiben Sie die Bedeutung in eigenen Worten.
- Finden Sie zwei Beispiele für Paaren f und g, welche in der gewünschten Relation stehen.

a) $f \in O(g)$
b) $f \in o(g)$
c) $f \in \Omega(g)$
d) $f \in \omega(g)$
e) $f \in \Theta(g)$

Problem 2 - O-Notation 2 (5 P)

Beweisen Sie:
Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}, k > 0$ gilt: $n + log(n^k) = \Theta(n)$

Problem 3 - Erwartungswert (7P + 3P)

Betrachten Sie folgendes Spiel im Kasino:

Sie kaufen sich mit einem Münzbetrag X in das Spiel ein.

Das Spiel läuft in Runden ab: Der Croupier setzt einen Betrag von 1 in der ersten Runde. Sie dürfen nun eine faire Münze werfen.
Werfen Sie einen Kopf, so bekommen Sie den Betrag auf dem Tisch ausgezahlt und das Spiel endet.
Werfen Sie eine Zahl, dann wird der Betrag auf dem Tisch verdoppelt und Sie dürfen die Münze erneut werfen.

Betrachten Sie folgende zwei Szenarien:

- Das Spiel wird nach einer festen Rundenanzahl n abgebrochen
- Das Spiel wird so lange gespielt, bis zum ersten Mal der Kopf geworfen wird (notfalls wird unendlich lange gespielt).

Welchen Münzbetrag dürfen Sie in beiden Szenarien maximal bezahlen, um erwartet noch einen Gewinn zu erzielen?

Problem 4 - Auswahl (10P)

Wählen Sie eine der gegebenen 2 Aufgaben und lösen Sie diese um die 10 Punkte zu erhalten. Es können nicht mehr als 10 Punkte erreicht werden, auch wenn Sie mehr als eine Aufgabe lösen und votieren.

Problem 4.1 - Zufällige Permutationen

Für den in der Vorlesung vorgestellten randomisierten Algorithmus ist es entscheidend die Punkte in eine zufällige gleichverteilte Anordnung zu bringen. Betrachten Sie die beiden folgenden Verfahren:

1. Jede Permutation lässt sich als Folge von Transpositionen (Vertauschungen zweier Elemente) der identischen Abbildung darstellen. Wir wählen also zwei unterschiedliche Positionen aus 1 bis n zufällig gleichverteilt und vertauschen diese. Dies führen wir n mal aus.

2. Eine Liste enthält zu Beginn die Zahlen 1 bis n. Wir ziehen nun eine zufällig gleichverteilte Position der Liste. Der Eintrag dieser Position wird als das Bild der ersten Position der Permutation gewählt und aus der Liste gelöscht. Dies führen wir insgesamt n mal aus.

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Ergebnis-Permutationen der beiden Verfahren gleichverteilt sind. Analysieren Sie asymptotisch die Laufzeit, den Speicherverbrauch und die benötigten Zufallsbits.

Problem 4.2 - Closest Pair

Das Closest Pair Berechnungsproblem ist wie folgt definiert: Gegeben ist eine Liste $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ von n Punkten aus $\mathbb{R}^2$. Gesucht ist dasjenige Paar $(p_a, p_b) \in P^2$, mit minimalem euklidischen Abstand $||p_a - p_b||_2$.

Geben Sie einen Divide & Conquer Algorithmus für das Closest Pair Problem an, welcher vergleichsbasiert (ohne Hashing/Rundung) eine deterministische Laufzeit von $\mathcal{O}(n \log n)$ realisiert.
Beweisen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.