TI 2 - Ergänzung 1

$\boxed{A1}$

1. $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ mit:

- $Z = \{s_1, \dots, s_m, f_1, \dots, f_m\}$, ← $s_i \mathrel{\hat{=}}$ „search i", $f_i \mathrel{\hat{=}}$ „i found"
- $\Gamma = \{a_1, \dots, a_m, \Box\}$,
- $z_0 = s_1$,
- $E = \{f_m\}$ und
- $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ mit

$$\delta(s_i, a_j) = \begin{cases} (f_i, a_j, N), & \text{falls } i = j \\ (s_i, a_j, R), & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

$$\delta(s_i, \Box) = (s_i, \Box, N),$$ ← M „hält"

$$\delta(f_i, a_j) = (f_i, a_j, L) \quad \text{und}$$

$$\delta(f_i, \Box) = \begin{cases} (s_{i+1}, \Box, R), & \text{falls } i \neq m \\ (f_i, \Box, N), & \text{falls } i = m \end{cases}$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

2. $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit:

- $Z = \mathcal{P}(\{1, \ldots, m\})$, ← Potenzmenge von $\{1, \ldots, m\}$. Zustand $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ deutet an, dass $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ schon gelesen wurden.
- $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_m, \square\}$,
- $z_0 = \emptyset$,
- $E = \{1, \ldots, m\}$ und
- $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ mit

$$\delta(A, a_i) = (A \cup \{i\}, a_i, R) \quad \text{und}$$

$$\delta(A, \square) = (A, \square, N)$$ ← M „hält"

für alle $A \in Z$ und alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.

3. $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit:

- $Z = \{s_1, \dots, s_m, f, a\}$, ← $s_i \hat{=}$ „search i", $f \hat{=}$ „found", $a \hat{=}$ „accept"
- $\Gamma = \{a_1, \dots, a_m, \square, x\}$,
- $z_0 = s_1$,
- $E = \{a\}$ und
- $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ mit

$$\delta(s_i, a_j) = \begin{cases} (f, a_j, N), & \text{falls } i = j \\ (s_i, a_j, R), & \text{falls } i \neq j \end{cases},$$

$$\delta(s_i, \square) = (s_i, \square, N),$$ ← M „hält"

$$\delta(s_i, x) = \begin{cases} (s_{i+1}, x, R), & \text{falls } i \neq m \\ (a, x, N), & \text{falls } i = m \end{cases},$$

$$\delta(f, a_j) = (f, a_j, L),$$

$$\delta(f, \square) = (s_1, x, N),$$

M „hält" ↓

$$\delta(f, x) = (f, x, L) \quad \text{und} \quad \delta(a, y) = (a, y, N)$$

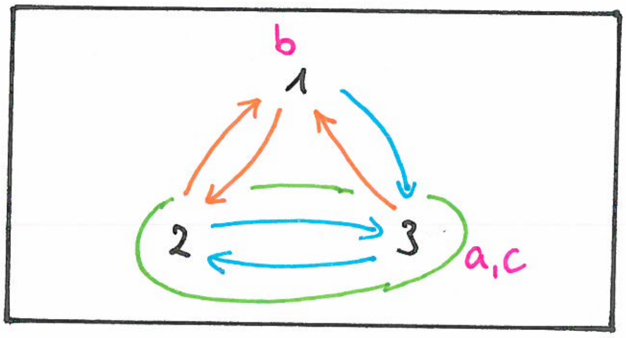
für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und alle $y \in \Gamma$.

$\boxed{A2}$ Siehe Ergänzungswebseite unter „Hilfreiche Links".

$\boxed{A3}$

Nur zum Überlegen!

Graphisch:



blau: P
orange: f
grün: Q

Bitte immer so angeben!

Formal:

$\mathcal{A} = (\mathcal{U}, \mathcal{I})$ mit $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ und $\mathcal{I}$ mit:

- $\mathcal{I}(P) = \{(1,3),(2,3),(3,2)\}$,
- $\mathcal{I}(f) = \{(1,2),(2,1),(3,1)\}$ bzw.

  $\mathcal{I}(f): \mathcal{U} \to \mathcal{U},\ 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 1$,
- $\mathcal{I}(Q) = \{2,3\}$,
- $\mathcal{I}(a) = 3$, $\mathcal{I}(b) = 1$ und $\mathcal{I}(c) = 3$.

$\boxed{A4}$ <u>Tipp</u>: $\forall x$ mit Regel $\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$ „reinziehen"!

Versucht man, analog zu Aufgabe 3, Schritt für Schritt ein Modell für F graphisch zu konstruieren, so stellt man fest, dass F bei Teilaufgabe 1 kein endliches und bei Teilaufgabe 2 gar kein Modell besitzt.

1. F ist erfüllbar! Beweis durch Angabe eines Modells:

   $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 0$, $I(b) = 1$ und $I(P) = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$.

2. F ist nicht erfüllbar! Beweis durch Widerspruch:

$$F \equiv \underbrace{\forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\, Q(x,y))}_{(1)} \wedge \underbrace{\forall x\, \neg Q(x,x)}_{(2)} \wedge \underbrace{\exists x\, P(x)}_{(3)}$$

Angenommen, F ist erfüllbar und $\mathcal{A} = (U, I)$ ist ein Modell von F. Wegen (3) gibt es ein $u \in U$ mit $u \in I(P)$. Wegen (1) gilt dann $(u,v) \in I(Q)$ für alle $v \in U$, insbesondere also auch $(u,u) \in I(Q)$, was im Widerspruch zu (2) steht.