TI 2 - Ergänzung 3

Beispiele aus der Vorlesung:

1. $\mathrm{add} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad (m,n) \mapsto m+n$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{add}(0,n) &= n, \\ \mathrm{add}(m+1,n) &= s(\mathrm{add}(m,n)). \end{aligned}\right\} \quad 0+n=n \text{ und } (m+1)+n = (m+n)+1$$

2. $\mathrm{mult} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad (m,n) \mapsto m \cdot n$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{mult}(0,n) &= 0, \\ \mathrm{mult}(m+1,n) &= \mathrm{add}(\mathrm{mult}(m,n), n). \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \cdot n = 0 \text{ und} \\ &(m+1) \cdot n = m \cdot n + n \end{aligned}$$

3. $\mathrm{dec} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n \mathbin{\dot{-}} 1$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{dec}(0) &= 0, \\ \mathrm{dec}(n+1) &= n. \end{aligned}\right\} \quad 0 \mathbin{\dot{-}} 1 = 0 \text{ und } (n+1) \mathbin{\dot{-}} 1 = n$$

4. $\mathrm{sub} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad (m,n) \mapsto m \mathbin{\dot{-}} n$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sub}(m,0) &= m, \\ \mathrm{sub}(m,n+1) &= \mathrm{dec}(\mathrm{sub}(m,n)). \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &m \mathbin{\dot{-}} 0 = m \quad \text{und} \\ &m \mathbin{\dot{-}} (n+1) = (m \mathbin{\dot{-}} n) \mathbin{\dot{-}} 1 \end{aligned}$$

Info:

Wir zeigen die primitive Rekursivität von Funktionen, indem wir

a) sie als Komposition primitiv rekursiver Funktionen darstellen oder

b) zeigen, dass sie durch primitive Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen entstehen.

Alternativ könnte man LOOP-Programme angeben, die sie berechnen, aber das ist nicht der Sinn dieser Ergänzung.

$\boxed{A1}$

1. <u>Komposition</u>:

   $zero(n) = sub(1,n)$.

2. <u>Primitive Rekursion</u>:

   $even(0) = 1$,

   $even(n+1) = zero(even(n))$.

3. <u>Komposition</u>:

   $odd(n) = zero(even(n))$.

   <u>Primitive Rekursion</u>:

   $odd(0) = 0$,

   $odd(n+1) = zero(odd(n))$ oder $odd(n+1) = even(n)$.

4. <u>Primitive Rekursion</u>:

   $half(0) = 0$,

   $half(n+1) = add(half(n), odd(n))$.

5. <u>Komposition:</u>

$leq(m,n) = zero(sub(m,n))$.

6. <u>Komposition:</u>

$eq(m,n) = mult(leq(m,n), leq(n,m))$

oder

$eq(m,n) = zero(add(sub(m,n), sub(n,m)))$.

7. <u>Komposition:</u>

$between(n,a,b) = mult(leq(a,n), leq(n,b))$

oder

$between(n,a,b) = zero(add(sub(a,n), sub(n,b)))$.

8. <u>Komposition:</u>

$ifzero(n,a,b) = add(mult(zero(n), a), mult(zero(zero(n)), b))$.

<u>Primitive Rekursion:</u>

$ifzero(0,a,b) = a$,

$ifzero(n+1,a,b) = b$.

9. <u>Komposition</u>:

$max(m,n) = ifzero(leq(m,n), m, n)$

oder

$max(m,n) = add(m, sub(n,m))$.

10. <u>Primitive Rekursion</u>:

$fallfac(0,n) = 1,$

$fallfac(m+1,n) = mult(fallfac(m,n), sub(n,m))$.

11. <u>Komposition</u>:

$risefac(m,n) = fallfac(m, dec(add(m,n)))$.

<u>Primitive Rekursion</u>:

$risefac(0,n) = 1,$

$risefac(m+1,n) = mult(risefac(m,n), add(m,n))$.

12. <u>Komposition</u>:

$fac(n) = fallfac(n,n)$

oder

$fac(n) = risefac(n,1)$.

<u>Primitive Rekursion</u>:

$fac(0) = 1,$

$fac(n+1) = mult(fac(n), s(n))$.

$\boxed{A2}$

1. „$\Rightarrow$": Sei f primitiv rekursiv. Da add und s primitiv rekursiv sind, ist s_1 wegen

$$s_1(0) = f(0)$$
$$s_1(n+1) = add(s_1(n), f(s(n)))$$

auch primitiv rekursiv.

„$\Leftarrow$": Sei s_1 primitiv rekursiv. Da sub und s primitiv rekursiv sind, ist f wegen

$$f(0) = s_1(0)$$
$$f(n+1) = sub(s_1(s(n)), s_1(n))$$

auch primitiv rekursiv. $\square$

2. Seien f und g primitiv rekursiv. Dann ist nach Teil 1. auch s_1 primitiv rekursiv.

Aus $s_2(n) = s_1(g(n))$ folgt die primitive Rekursivität von s_2. $\square$

$\boxed{A3}$ (korrigierte Version)

$\mu f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\mu f(x,y) = \min\left\{ n \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{x \dot- n}{y \dot- n} \right\rfloor = 0 \wedge \forall m < n: \left\lfloor \frac{x \dot- m}{y \dot- m} \right\rfloor > 0 \right\}$$

$$= \min\left\{ n \in \mathbb{N} \mid x \dot- n < y \dot- n \wedge \forall m < n: 0 < y \dot- m \leq x \dot- m \right\}$$

$$= \min\left\{ n \in \mathbb{N} \mid x < y \wedge n < y \wedge \forall m < n: y > m \wedge (x \geq y \vee m \geq y) \right\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } x < y \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

„undefiniert"

$\boxed{A4}$

Für <u>totale Funktionen</u> $f: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu f(x_1, \dots, x_k) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x_1, \dots, x_k) = 0\}.$$

1. $\mu f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{x \dot{-} 2n = 0}_{\Leftrightarrow\ x \le 2n\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{2} \le n}\} = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil.$$

2. $\mu f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (x \dot{-} n) + (y \dot{-} n) = 0\}$$

$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{x \dot{-} n = 0}_{x \le n} \wedge \underbrace{y \dot{-} n = 0}_{y \le n}\}$$

$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \ge x, y\}$$

$$= \max(x,y).$$

3. $\mu f: \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f() = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 6n + 9 = 0\}$$

$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n = 3\}$$

$$= 3.$$

4. $\mu f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f(x,y,z) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (x^2 \dot{-} n) + (z \dot{-} y) + (y \dot{-} 2z) = 0\}$$

$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x^2 \le n \wedge z \le y \wedge y \le 2z\}$$

$$= x^2 \text{ für } z \le y \le 2z \text{ (sonst undefiniert)}.$$

5. $\mu f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid 5x \dot{-} n = 0\}$$
$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid 5x \leq n\}$$
$$= \underline{\underline{5x}}$$

6. $\mu f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x + (y \dot{-} n) = 0\}$$
$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x = 0 \wedge y \leq n\}$$
$$= \underline{\underline{y}} \text{ für } x = 0 \text{ (und sonst undefiniert)}.$$

7. $\mu f: \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f() = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \textstyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = 0\} = \underline{\underline{0}}.$$

8. $\mu f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit:

$$\mu f(x,y,z) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y+z) \dot{-} (n+x) = 0\}$$
$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid y+z \leq n+x\}$$
$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y+z) - x \leq n\}$$
$$= \underline{\underline{(y+z) \dot{-} x}}.$$