TI 2 - Ergänzung 4

A1

1. Wahrheitstafel:

A	B	C	$((A$	$\rightarrow$	$B)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	B	$\vee$	$A))$	$\wedge$	C
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

„Semantik von F"

DNF:

$$F \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C).$$

KNF:

$$F \equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C).$$

2. F ist erfüllbar.

Modell: $\mathcal{A} = (\mathcal{U}, I)$ mit $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ und I mit:

- $I(P) = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$,
- $I(f): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ und
- $I(a) = 0$

3.

a) Angenommen, g ist Turing-berechenbar. Dann gibt es eine DTM, die auf Eingabe n den Wert von

$$f_2(n) = g(n) - f_1(n)$$

berechnet. Widerspruch, da f_2 nicht Turing-berechenbar.

Falls dieser definiert ist!

also $f_1 = c_1^1$

b) Wähle $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 1$ und $f_2 = g$ mit g aus Präsenzaufgabe 2. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$h(i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_1(i) = f_2(i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

g ist total und hat Wertebereich $\{0,1\}$. Deshalb:

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 = g(i) \\ 0, & \text{falls } \boxed{0 = g(i)} \end{cases}$$

$$= g(i).$$

Somit gilt $h = g$, d.h. h ist nicht Turing-berechenbar.

$\boxed{A2}$

1. Falsch!

Es gilt $0 \dot{-} (0 \dot{-} 1) = 0 \dot{-} 0 = 0$, aber $0 \dot{-} 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

2. Richtig!

Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(x \dot{-} y) \dot{-} z &= \max\{x-y, 0\} \dot{-} z \\
&= \max\{\max\{x-y,0\} - z, 0\} \\
&= \max\{\max\{x-y-z, -z\}, 0\} \\
&= \max\{x-y-z, -z, 0\} \\
&= \max\{x-y-z, 0\} \\
&= \max\{x-(y+z), 0\} \\
&= x \dot{-} (y+z).
\end{aligned}
$$

3. Falsch!

Es gilt $1 + 0 \dot{-} 1 = 1 \dot{-} 1 = 0$, aber $1 + (0 \dot{-} 1) = 1 + 0 = 1$.

4. Richtig!

Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
x(y \dot{-} z) &= x \cdot \max\{y-z, 0\} \\
&= \max\{x(y-z), x \cdot 0\}
\end{aligned}
$$

$$= \max\{xy - xz, 0\}$$

$$= xy \dot{-} xz .$$

5. Falsch!

Es gilt $(0 \dot{-} 1)^2 = 0^2 = 0$, aber $0^2 \dot{-} 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 = 1$.

6. Richtig!

Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)(x \dot{-} y) \overset{4.}{=} (x+y)x \dot{-} (x+y)y$$

$$= \max\{(x+y)x - (x+y)y, 0\}$$

$$= \max\{x^2 + xy - xy - y^2, 0\}$$

$$= \max\{x^2 - y^2, 0\}$$

$$= x^2 \dot{-} y^2 .$$

$\boxed{A3}$

Aus $x + y \dot{-} z = \max\{x+y-z, 0\}$ und $x + (y \dot{-} z) = x + \max\{y-z, 0\}$

$= \max\{x+y-z, x\}$ folgt:

$$x + y \dot{-} z = x + (y \dot{-} z) \iff \max\{x+y-z, 0\} = \max\{x+y-z, x\}$$

$$\iff x+y-z \geq x \quad \text{oder} \quad x = 0$$

$$\iff y \geq z \quad \text{oder} \quad x = 0.$$

$\boxed{A4}$

1. Primitive Rekursion:

$$\exists_P^k(0,n_2,\dots,n_k) = P(0,n_2,\dots,n_k),$$

$$\exists_P^k(n_1+1,n_2,\dots,n_k) = max\left(\exists_P^k(n_1,\dots,n_k),\ P(s(n_1),n_2,\dots,n_k)\right).$$

2. Primitive Rekursion:

$$\forall_P^k(0,n_2,\dots,n_k) = P(0,n_2,\dots,n_k),$$

$$\forall_P^k(n_1+1,n_2,\dots,n_k) = mult\left(\forall_P^k(n_1,\dots,n_k),\ P(s(n_1),n_2,\dots,n_k)\right).$$

Komposition:

$$\forall_P^k(n_1,\dots,n_k) = zero\left(\forall_{P'}^k(n_1,\dots,n_k)\right)$$

für $P'(n_1,\dots,n_k) = zero(P(n_1,\dots,n_k))$.

3. Primitive Rekursion:

$$min_P^k(0,n_2,\dots,n_k) = 0,$$

$$min_P^k(n_1+1,n_2,\dots,n_k)$$

$$\overset{(*)}{=} ifzero\left(\exists_P^k(n_1,\dots,n_k),\ sub\left(s(s(n_1)),P(s(n_1),n_2,\dots,n_k)\right),\ min_P^k(n_1,\dots,n_k)\right).$$

4. <u>Primitive Rekursion</u>:

$$\max_P^k(0, n_2, \dots, n_k) = 0,$$

$$\max_P^k(n_1+1, n_2, \dots, n_k) = \mathrm{ifzero}\big(P(s(n_1), n_2, \dots, n_k), \max_P^k(n_1, \dots, n_k), s(n_1)\big).$$

(*) Was ist $\min_P^k(n_1+1, n_2, \dots, n_k)$?

	$P(n_1+1, n_2, \dots, n_k) = 1$	$P(n_1+1, n_2, \dots, n_k) = 0$
$\exists_P^k(n_1, \dots, n_k) = 1$	$\min_P^k(n_1, \dots, n_k)$	$\min_P^k(n_1, \dots, n_k)$
$\exists_P^k(n_1, \dots, n_k) = 0$	n_1+1	n_1+2

$\boxed{A5}$

1. Die Funktion

$$\text{divides}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } m \text{ Teiler von } n \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist primitiv rekursiv, denn es gilt

$$\text{divides}(m,n) = \exists^3_P(n,m,n)$$

für $P(x,y,z) = eq(mult(x,y),z)$.

Die Funktion

$$h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (k,\ell) \mapsto |\{m \leq k \mid m \text{ teilt } \ell\}|$$

ist ebenfalls primitiv rekursiv wegen der primitiven Rekursion:

$$h(0,\ell) = zero(\ell),$$
$$h(k+1,\ell) = add(h(k,\ell), \text{divides}(s(k),\ell)).$$

Wegen $d(n) = h(n,n)$ ist auch d primitiv rekursiv. $\square$

2. Die Funktion

$$\mathrm{prime} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ prim ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist primitiv rekursiv, denn es gilt

$$\mathrm{prime}(n) = \mathrm{mult}\left(\forall_P^2(m,n),\ \mathrm{leq}(2,n)\right)$$

für

$$P(x,y) = \underbrace{\mathrm{zero}\left(\mathrm{mult}(\mathrm{between}(x,2,\mathrm{dec}(y)),\ \mathrm{divides}(x,y))\right)}_{= \begin{cases} 0, & \text{falls } 2 \leq x \leq y-1 \text{ und } x \text{ teilt } y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}}.$$

Die primitive Rekursivität von π folgt aus der primitiven Rekursion:

$$\pi(0) = 0,$$
$$\pi(n+1) = \mathrm{add}\left(\pi(n),\ \mathrm{prime}(s(n))\right).$$

$\boxed{A6}$

1. Für beliebige $x, y \in \mathbb{N}$ mit $y \neq 0$ gilt:

$$\lfloor \tfrac{x}{y} \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq \tfrac{x}{y} \}$$
$$= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid n+1 > \tfrac{x}{y} \}$$
$$= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid (n+1)y > x \}$$
$$= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid (n+1)y \geq x+1 \}$$
$$= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid (x+1) \dot{-} (n+1)y = 0 \}$$

Also gilt $div = \mu f$ für $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $(w,x,y) \mapsto (x+1) \dot{-} (w+1)y$.

f ist primitiv rekursiv und somit ist div μ-rekursiv, aber nicht primitiv rekursiv, da nicht total.

2. Für beliebige $x, y \in \mathbb{N}$ mit $y \neq 0$ gilt:

$$x \bmod y = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid y \text{ teilt } x-n \}$$
$$= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid divides(y, sub(x,n)) = 1 \}.$$

Also gilt $mod = \mu f$ für $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$(w,x,y) \mapsto zero(divides(y, sub(x,w))).$$

Wieder ist f primitiv rekursiv und somit mod μ-rekursiv, aber nicht primitiv rekursiv, da nicht total ($x \bmod 0$ nicht definiert).

3. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \lfloor \sqrt{x} \rfloor &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid n+1 > \sqrt{x} \} \\ &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid (n+1)^2 > x \} \\ &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid (n+1)^2 \geq x+1 \} \\ &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid (x+1) \dot{-} (n+1)^2 = 0 \} . \end{aligned}$$

Also gilt $\mathrm{sqrt} = \mu f$ für $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(w,x) \mapsto (x+1) \dot{-} (w+1)^2$.
Wieder ist f primitiv rekursiv und somit sqrt μ-rekursiv.
Diesmal ist sogar μf (also sqrt) primitiv rekursiv. Zum Beweis betrachte man entweder das LOOP-Programm für sqrt aus Ergänzung 2, Aufgabe 3 oder folgende Gleichung:

$$\mathrm{sqrt}(n) = \max_p^2 (n,n)$$

für $P(x,y) = \mathrm{leq}(\mathrm{mult}(x,x), y)$.

$\boxed{A7}$

Erinnerung:

- Die Cantorsche Paarungsfunktion $c: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist total, bijektiv und berechenbar.
- Ihre Umkehrungen $e, f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $e(c(x,y)) = x$ und $f(c(x,y)) = y$ sind total und berechenbar.

Graphisch:

		y					
		0	1	2	3	4	...
	0	0	1	3	6	10	
	1	2	4	7	11		
x	2	5	8	12			
	3	9	13		$\ddots$		
	4	14					
	$\vdots$						

Beispielsweise gilt $c(1,2) = 7$, $e(7) = 1$ und $f(7) = 2$.

1. <u>Fall 1:</u> $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Dann ist $L \in \{A, B\}$ rekursiv aufzählbar.

<u>Fall 2:</u> $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$.

Dann gibt es totale und berechenbare Funktionen $f_A, f_B : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $A = \{f_A(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{f_B(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiere $f_L : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit

$$f_L(n) = \begin{cases} f_A\left(\frac{n}{2}\right), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ f_B\left(\frac{n-1}{2}\right), & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist f_L total und berechenbar und es gilt $L = \{f_L(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. <u>Fall 1</u>: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Dann ist $L = \emptyset$ rekursiv aufzählbar.

<u>Fall 2</u>: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$.

Dann gibt es totale und berechenbare Funktionen $f_A, f_B : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $A = \{ f(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ und $B = \{ f_B(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Definiere $f_L : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit

$$f_L(n) = f_A(e(n))\, f_B(f(n)).$$

Dann ist f_L total und berechenbar und es gilt $L = \{ f_L(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$.

3. <u>Fall 1</u>: $\nexists w \in A \cap B$.

Dann ist $L = \emptyset$ rekursiv aufzählbar.

<u>Fall 2</u>: $\exists w \in A \cap B$.

Dann sind A und B beide nicht leer und es gibt totale und berechenbare Funktionen $f_A, f_B : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $A = \{ f_A(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ und $B = \{ f_B(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Definiere $f_L : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit

$$f_L(n) = \begin{cases} f_A(e(n)), & \text{falls } f_A(e(n)) = f_B(f(n)) \\ w & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f_L total und berechenbar und es gilt $L = \{ f_L(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$.

4. Frohes Knobeln!

Bei Fragen oder Lösungsvorschlägen gerne vorbeikommen.