



## Ergänzungsblatt 3

*Hinweis:* Neben add, mult, dec und sub dürfen in jeder Aufgabe alle Funktionen aus vorherigen Aufgaben als primitiv rekursiv vorausgesetzt werden.

### Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$p = \text{rec}(c_1^1, \text{mult}(\pi_1^3, \pi_3^3))(\pi_2^2, \pi_1^2).$$

Geben Sie eine möglichst einfache Zuordnungsvorschrift für  $p$  an.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind, indem Sie für jede Funktion einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

1.  $\text{zero}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
2.  $\text{leq}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
3.  $\text{eq}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
4.  $\text{ifzero}: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y, z) \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } x = 0 \\ z & \text{sonst} \end{cases}$
5.  $\text{max}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } x \leq y \\ x & \text{sonst} \end{cases}$
6.  $\Delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \sum_{i=0}^x i$

### Aufgabe 3

Sei  $P: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  eine primitiv rekursive Funktion mit Wertebereich  $\{0, 1\}$ . Zeigen Sie, dass der (dreistellige) *beschränkte Existenzoperator*  $\exists_P^3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$\exists_P^3(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists \ell \leq x: P(\ell, y, z) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

*Hinweis:*  $\exists_P^3$  ist eine Verallgemeinerungen des beschränkten Existenzoperators  $Q$  aus Vorlesungsfolie 10.6.

#### **Aufgabe 4**

Sei  $P: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  eine primitiv rekursive Funktion mit Wertebereich  $\{0, 1\}$ . Zeigen Sie, dass der (zweistellige) *beschränkte Maximumoperator*  $\max_P^2: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$\max_P^2(x, y) = \begin{cases} \max \{k \leq x \mid P(k, y) = 1\}, & \text{falls ein } k \leq x \text{ existiert mit } P(k, y) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie für einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

*Hinweis:*  $\max_P^2$  ist eine Verallgemeinerung des beschränkten Maximumoperators  $q$  aus Vorlesungsfolie 10.6.