



## Ergänzungsblatt 4

### Aufgabe 1

Sei  $c: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  die *Cantorsche Paarungsfunktion* aus Vorlesungseinheit 10. Zeigen Sie, dass  $c$  bijektiv ist und dass sowohl  $c$  als auch die Funktionen  $e, f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $e(n) = \pi_1^2(c^{-1}(n))$  und  $f(n) = \pi_2^2(c^{-1}(n))$  primitiv rekursiv sind.

*Hinweis:* Beim Beweis der Injektivität von  $c$  ist folgende Monotonieeigenschaft hilfreich:

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{N}: x + y > x' + y' \implies c(x, y) > c(x', y').$$

### Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y, z) \mapsto \lceil \log_2(y \dot{-} xz) \rceil,$$

die für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$  mit  $xz < y$  definiert sei. Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung von  $\mu f$  an.

### Aufgabe 3

Geben Sie für jede der folgenden totalen Funktionen  $f$  eine möglichst einfache Beschreibung von  $\mu f$  an.

1.  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto y \dot{-} 2x$
2.  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y, z) \mapsto (y \dot{-} x) + (z \dot{-} x)$
3.  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^2 - 3x + 2$