



## Ergänzungsblatt 5

### Aufgabe 1

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet. Zeigen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Sprachen  $L$ , dass diese für beliebige rekursiv aufzählbaren Sprachen  $A, B, A_0, A_1, A_2, \dots$  über  $\Sigma$  selbst rekursiv aufzählbar sind.

1.  $L = A \cup B$

3.  $L = A \cap B$

5.  $L = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$

2.  $L = AB$

4.  $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

6.  $L = A^*$

### Aufgabe 2

Sei  $L$  die Menge aller Gödelisierungen von Turingmaschinen, die eine Funktion mit unendlicher Bildmenge berechnen, d. h. :

$$L = \{w \mid \text{die Bildmenge der von } M_w \text{ berechneten Funktion ist unendlich}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $L$  unentscheidbar ist, indem Sie

1. den Satz von Rice anwenden.
2.  $H_0 \leq L$  zeigen.

### Aufgabe 3

Seien  $\Sigma$  ein Alphabet und  $u, v \in \Sigma^*$  Wörter über  $\Sigma$ . Wir betrachten die Menge  $L_{u,v}$  aller Gödelindizes von Turingmaschinen, die  $u$  akzeptieren, aber  $v$  nicht, d. h. :

$$L_{u,v} = \{w \mid u \in T(M_w) \wedge v \notin T(M_w)\}.$$

1. Zeigen Sie: Wenn  $u \neq v$ , dann  $H_0 \leq L_{u,v}$ .
2. Zeigen Sie: Wenn  $u \neq v$ , dann  $\overline{H_0} \leq L_{u,v}$ .
3. Was kann man über die semi- und die co-semi-Entscheidbarkeit von  $L_{u,v}$  sagen?

*Hinweis:* Eine Sprache ist genau dann co-semi-entscheidbar, wenn ihr Komplement semi-entscheidbar ist.

#### Aufgabe 4

Wir betrachten folgende Entscheidungsprobleme für Turingmaschinen:

- (a) Das Leerheitsproblem EMP  
**Eingabe:** Eine Turingmaschine  $M$   
**Frage:** Ist die von  $M$  akzeptierte Sprache leer?
- (b) Das Endlichkeitsproblem FIN  
**Eingabe:** Eine Turingmaschine  $M$   
**Frage:** Ist die von  $M$  akzeptierte Sprache endlich?
- (c) Das Regularitätsproblem REG  
**Eingabe:** Eine Turingmaschine  $M$   
**Frage:** Ist die von  $M$  akzeptierte Sprache regulär?

Zeigen Sie:

1. EMP ist unentscheidbar.
2.  $\text{EMP} \leq \text{FIN}$ .
3.  $\text{FIN} \leq \text{REG}$ .