# Ergänzungsblatt 7

## Aufgabe 1

Zeigen Sie: $\mathrm{PCP}_\Sigma$ ist genau dann entscheidbar, wenn $\Sigma$ ein unäres Alphabet ist.

## Aufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b\}^*$ ein Alphabet, $M_1$ die 1-Bahnd DTM

$$M_1 = (\{0,1,2,3,4\}, \Sigma, \Sigma \cup \{m, \Box\}, \delta, 0, \Box, \{4\})$$

mit

| $q$ | $\delta(q,a)$ | $\delta(q,b)$ | $\delta(q,m)$ | $\delta(q,\Box)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $(0,a,R)$ | $(1,m,L)$ | | |
| 1 | $(2,m,R)$ | | $(1,m,L)$ | |
| 2 | | $(1,m,L)$ | $(2,m,R)$ | $(3,\Box,L)$ |
| 3 | | | $(3,m,L)$ | $(4,\Box,N)$ |

und $L$ die von $M_1$ akzeptierte Sprache.

1. Geben Sie $L$ in Mengenschreibweise an.
2. Geben Sie $\mathrm{time}_{M_1}(x)$ für alle $x \in L$ an.
3. Geben Sie eine 2-Band-DTM $M_2$ für $L$ an, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$\mathrm{time}_{M_2}(x) \leq |x| + 1.$$

4. Gibt es eine Mehrband-DTM $M$ für $L$, sodass die Ungleichung

$$\mathrm{time}_M(x) \leq |x|$$

für mindestens ein $x \in L$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 3

Sie sind Doktorand und arbeiten gerade an Ihrer Dissertation über Komplexitätstheorie. Plötzlich reißt ein Kollege die Bürotür auf und platzt voller Entsetzen heraus:

> *„Eine Turingmaschine, die nur $n+1$ Schritte machen darf, kann das Eingabewort nur einmal von links nach rechts durchlaufen und danach, wenn sie das erste Leersymbol nach dem Eingabewort sieht, in einem Schritt entscheiden, ob sie das Wort akzeptiert oder nicht. So ähnlich arbeiten doch endliche Automaten. Enthält dann* $\mathsf{TIME}(n+1)$ *genau die regulären Sprachen?“*

Wie reagieren Sie darauf?

**Aufgabe 4**

Sie schreiben wieder an Ihrer Dissertation, bis Ihr Kollege wieder in Ihr Büro stürmt und stammelt:

> *„Enthält vielleicht $\mathsf{TIME}(n)$ genau die regulären Sprachen?"*

Wie reagieren Sie diesmal darauf?

**Aufgabe 5**

Wir erweitern die Menge der aussagenlogischen Formeln um Konstanten true und false und zweistellige Junktoren $\oplus$ (XOR) und $\bar{\wedge}$ (NAND). Dabei gilt $\mathcal{A}(\text{true}) = 1$ und $\mathcal{A}(\text{false}) = 0$ für jede Belegung $\mathcal{A}$, sowie

$$\mathcal{A}(F \oplus G) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\ 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) \neq \mathcal{A}(G) \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(F \bar{\wedge} G) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}(G) = 0, \end{cases}$$

für jede Belegung $\mathcal{A}$, die für alle Variablen in $F$ und $G$ definiert ist. In dieser Aufgabe unterscheiden wir zwischen folgenden drei Sorten aussagenlogischer Formeln:

- *Boolesche Formeln* können Variablen und die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ enthalten.
- *XOR-Formeln* können Variablen, Konstanten und den Junktor $\oplus$ enthalten.
- *NAND-Formeln* können Variablen, Konstanten und den Junktor $\bar{\wedge}$ enthalten.

Zeigen Sie:

1. Folgendes Problem liegt in $\mathsf{P}$.

   <u>XOR-SAT</u>
   **Eingabe:** Eine XOR-Formel.
   **Frage:** Ist $F$ erfüllbar?

2. Folgendes Problem ist $\mathsf{NP}$-vollständig.

   <u>NAND-SAT</u>
   **Eingabe:** Eine NAND-Formel.
   **Frage:** Ist $F$ erfüllbar?

*Hinweis*: Sie können davon ausgehen, dass das folgende Problem $\mathsf{NP}$-vollständig ist:

<u>SAT</u>
**Eingabe:** Eine boolesche Formel.
**Frage:** Ist $F$ erfüllbar?