Ergänzungsblatt 8

Aufgabe 1

Zeigen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$:

1. Das folgende Entscheidungsproblem liegt in P.

   <u>MAX-k-SAT</u>
   Eingabe: Eine boolesche Formel F.
   Frage: Gibt es ein Modell für F, das höchstens k Variablen in F mit 1 belegt?

2. Das folgende Entscheidungsproblem ist NP-vollständig.

   <u>MIN-k-SAT</u>
   Eingabe: Eine boolesche Formel F.
   Frage: Gibt es ein Modell für F, das mindestens k Variablen in F mit 1 belegt?

Aufgabe 2

Das Spezialisierungsproblem besteht darin, jeden Mitarbeiter eines Schichtbetriebs auf ein Arbeitsbereich zu spezialisieren, sodass in jeder Schicht für jeden Arbeitsbereich ein Spezialist vorhanden ist.

Formal betrachten wir das folgende Entscheidungsproblem:

<u>Spezialisierung</u>
Gegeben: Endliche Mengen M, A und $S_1, \ldots, S_k \subseteq M$.
Frage: Gibt es eine Abbildung $s\colon M \to A$ mit $s(S_i) = A$ für alle $i \in [k]$?

Des Weiteren sei 2-Spezialisierung das obige Problem für festes $k = 2$.

Zeigen Sie:

1. 2-Spezialisierung $\in \mathsf{P}$.
2. Spezialisierung ist NP-vollständig.

Aufgabe 3

Das Knotenfärbbarkeitsproblem (englisch *Vertex coloring problem*) besteht darin, die Knoten eines gegebenen Graphen so zu färben, dass keine zwei benachbarten Knoten mit derselben Farbe gefärbt werden.

Formal betrachten wir das folgende Entscheidungsproblem:

<u>Färbbarkeit</u>
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Abbildung $\varphi\colon V \to [k]$ mit $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$?

Des Weiteren sei k-Färbbarkeit das obige Problem für ein festes $k \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass 3-Färbbarkeit NP-vollständig ist.

1. Zeigen Sie: 3-Färbbarkeit $\leq_p$ 4-Färbbarkeit.
2. Zeigen Sie: 4-Färbbarkeit $\leq_p$ 3-Färbbarkeit.