Ergänzungsblatt 9

Aufgabe 1

Das folgende Problem besteht darin, für gegebene Listen von Studierenden, Lehrveranstaltungen, Terminen und Anmeldungen zu entscheiden, ob jeder Lehrveranstaltung ein Termin so zugeordnet werden kann, dass jeder Studierende einen überschneidungsfreien Stundenplan hat. Formal definieren wir das Entscheidungsproblem STUNDENPLAN wie folgt:

<u>STUNDENPLAN</u>
Eingabe: Endliche Mengen S, L und T, sowie eine Relation $A \subseteq S \times L$.
Frage: Gibt es eine totale Funktion $g\colon L \to T$, sodass alle $\ell_1, \ell_2 \in L$, für die $\ell_1 \neq \ell_2$ und $\exists s \in S\colon (s, \ell_1), (s, \ell_2) \in A$ gilt, die Ungleichung $g(\ell_1) \neq g(\ell_2)$ erfüllen?

S, L, T und A stellen jeweils Mengen von Studierenden, Lehrveranstaltungen, Terminen und Anmeldungen dar. $(s, \ell) \in A$ besagt intuitiv, dass s sich für die Lehrveranstaltung ℓ angemeldet hat.

1. Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-vollständig ist.
2. Geben Sie eine Polynomialzeitreduktion von STUNDENPLAN auf SAT an. Sie brauchen die Korrektheit Ihrer Polynomialzeitreduktion nicht zu beweisen.

Aufgabe 2

Eine *Sprachklasse* ist eine Menge von formalen Sprachen. Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ sind $\mathsf{co}\mathcal{C}$ und $\overline{\mathcal{C}}$ ebenfalls Sprachklassen mit $\mathsf{co}\mathcal{C} = \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{L \mid L \notin \mathcal{C}\}$.

1. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Sprachklasse. Zeigen Sie:
   (a) $\mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}) = \mathcal{C}$
   (b) $\overline{\mathsf{co}\mathcal{C}} = \mathsf{co}\overline{\mathcal{C}}$
2. Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ beliebige Sprachklassen. Zeigen Sie:
$$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \iff \mathsf{co}\mathcal{C}_1 \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}_2.$$
3. Zeigen Sie, dass eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ genau dann unter Komplement abgeschlossen ist, wenn $\mathcal{C} = \mathsf{co}\mathcal{C}$ gilt.
4. Geben Sie entweder eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ mit der jeweiligen Eigenschaft an oder begründen Sie, warum keine solche Sprachklasse existieren kann.

(a) $\mathcal{C} = \mathsf{co}\mathcal{C}$

(b) $\mathcal{C} \subsetneq \mathsf{co}\mathcal{C}$

(c) $\mathsf{co}\mathcal{C} \subsetneq \overline{\mathcal{C}}$

(d) $\mathsf{co}\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{C}$

(e) $\overline{\mathcal{C}} = \mathsf{co}\mathcal{C}$

(f) $\overline{\mathcal{C}} \subsetneq \mathsf{co}\mathcal{C}$