



Ergänzungsblatt 11

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $S \subseteq V$ eine beliebige Menge von Knoten. S heißt *stabil*, falls keine zwei Knoten aus S durch eine Kante verbunden sind, d. h. :

$$S \text{ stabil} \iff \forall u, v \in S: \{u, v\} \notin E.$$

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NP-vollständig ist:

STABILITÄT

Eingabe: Ein Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine stabile Menge S der Größe $|S| = k$?

Aufgabe 2

Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Welche der folgenden Aussagen implizieren welche? Beweisen Sie Ihre Antworten.

- (a) f ist berechenbar
- (b) f ist zeitkonstruierbar
- (c) f ist platzkonstruierbar

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein *Pfad der Länge ℓ* ist ein Tupel $(v_0, \dots, v_\ell) \in V^{\ell+1}$ mit $(v_{i-1}, v_i) \in E$ für alle $i \in [\ell]$. Ein Pfad, in dem die erste und letzte Komponente gleich sind, heißt *Kreis*. Kreise der Länge 0 nennt man *trivial*. Ein *gerichteter kreisfreier Graph* (engl. *directed acyclic graph*, kurz: *DAG*) ist ein gerichteter Graph, der keine nichttrivialen Kreise enthält.

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NL-vollständig bezüglich \leq_{\log} ist:

DAGAP

Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$.

Frage: Ist G ein gerichteter kreisfreier Graph mit einem Pfad von s nach t ?

Hinweis: Sie dürfen wieder die NL-Vollständigkeit des folgenden Problems annehmen:

GAP

Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$.

Frage: Gibt es in G einen Pfad von s nach t ?

Diese wird in Vorlesungseinheit 39 bewiesen.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie für jedes der gegebenen Klassenpaare, welche Klasse in der jeweils anderen als Teilmenge enthalten ist und welche nicht. Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $\text{NTIME}(n^2)$ und $\text{DSPACE}(n^3)$
2. $\text{DTIME}(3n^2 + (\log n)^4)$ und $\text{DTIME}(n^2 + 1)$