Lösungsblatt 1

Hinweis: Alle Informationen und Materialien zur Ergänzung sind zu finden unter

`https://www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/s19/eti2/`.

Aufgabe 1

Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine natürliche Zahl, $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein m-elementiges Alphabet und L folgende Sprache über Σ:

$$L = \{w \in \Sigma^* \,|\, \text{in } w \text{ kommt jeder Buchstabe aus } \Sigma \text{ vor}\}.$$

Geben Sie eine DTM M mit höchstens $m+2$ Zuständen und höchstens $m+2$ Bandsymbolen für L an.

Lösung

$M = (\{s_1, \ldots, s_m, f, a\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\#, \Box\}, \delta, s_1, \Box, \{a\})$ für

$$\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

mit

$$\delta(s_i, a_j) = \begin{cases} (f, a_j, N) & \text{für } i = j \\ (s_i, a_j, R) & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad \delta(f, \Box) = (s_1, \#, N)$$

$$\delta(s_i, \Box) = (s_i, \Box, N) \qquad \delta(f, a_j) = (s_i, \Box, N)$$

$$\delta(s_i, \#) = \begin{cases} (a, \#, N) & \text{für } i = m \\ (s_{i+1}, \#, R) & \text{für } i < m \end{cases} \qquad \delta(f, \#) = (f, \#, N)$$

- $\delta(s_i, a_j) = \begin{cases} (f, a_j, N) & \text{für } i = j \\ (s_i, a_j, R) & \text{für } i \neq j, \end{cases}$
- $\delta(s_i, \#) = \begin{cases} (a, \#, N) & \text{für } i = m \\ (s_{i+1}, \#, R) & \text{für } i < m, \end{cases}$
- $\delta(s_i, \Box) = (s_i, \Box, N)$,
- $\delta(f, a_j) = (s_i, \Box, N)$,
- $\delta(f, \#) = (f, \#, N)$,
- $\delta(f, \Box) = (s_1, \#, N)$.

und $\delta(a, x) = (a, x, N)$ für alle $i, j \in [m]$ und alle $x \in \Gamma$.

Hinweis: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $[m] = \{k \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq k \leq m\}$.

Aufgabe 2

Gegeben seien folgende prädikatenlogische Formeln:

$$\begin{array}{lll} F_1 = \forall x \exists y P(x,y), & F_4 = \forall x \neg P(x, f(x)), & F_7 = \forall x(\exists y P(y,x) \to Q(x)), \\ F_2 = \forall x \neg P(x,x), & F_5 = \forall x \forall y (P(y, f(x)) \to P(x,y)), & F_8 = \neg Q(f(f(b))) \\ F_3 = \exists y \forall x \neg P(x,y), & F_6 = P(a, f(f(a))), & F_9 = P(f(c), c). \end{array}$$

Geben Sie ein Modell mit möglichst kleinem Universum für $F = \bigwedge_{i=1}^{9} F_i$ an.

Lösung

$\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \{0, 1, 2\}$ und I mit

- $I(P) = \{(0,1), (1,0), (2,0)\}$,
- $I(Q) = \{0, 1\}$,
- $I(f)\colon U \to U,\ 0 \mapsto 2, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$,
- $I(a) = I(c) = 0$ und $I(b) = 2$.

Hinweise zur Notation:

- Statt
  $$I(f)\colon U \to U,\ 0 \mapsto 2, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$$
  sind auch folgende Schreibweisen von Funktionen zulässig:
  (1) $I(f) = \{(0,2), (1,2), (2,1)\}$
  (2) $I(f)\colon U \to U,\ I(f)(0) = 2, I(f)(1) = 2, I(f)(2) = 1$
- Man kann auch $P^{\mathcal{A}}$, $Q^{\mathcal{A}}$, $f^{\mathcal{A}}$, $a^{\mathcal{A}}$, $b^{\mathcal{A}}$ und $c^{\mathcal{A}}$ statt $I(P)$, $I(Q)$, $I(f)$, $I(a)$, $I(b)$ und $I(c)$ schreiben.

  Beispielsweise kann dann $I(f)$ auch wie folgt definiert werden:
  $$f^{\mathcal{A}}\colon U \to U,\ f^{\mathcal{A}}(0) = 2, f^{\mathcal{A}}(1) = 2, f^{\mathcal{A}}(2) = 1.$$

Aufgabe 3

Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln sind erfüllbar? Geben Sie jeweils ein Modell an oder begründen Sie die Unerfüllbarkeit.

1. $F = P(a,b) \wedge$
   $\forall x \Big(\forall y \forall z \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z) \big) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \forall y \big(P(x,y) \to \neg P(y,x) \big) \Big)$
2. $F = \forall x \Big(\big(P(x) \to \forall y Q(x,y) \big) \wedge \neg Q(x,x) \Big) \wedge \exists x P(x)$

Lösung

1. F ist erfüllbar. Ein Modell für F ist $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(P) = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$, $I(a) = 0$ und $I(b) = 1$.

   Hinweis: Für diese Formel existiert kein endliches Modell.

2. F ist unerfüllbar. Angenommen, F wäre erfüllbar und $\mathcal{A} = (U, I)$ wäre ein Modell für F. Wegen $\exists x P(x)$ gibt es ein $u \in U$ mit $u \in I(P)$. Aus $\forall x\big(P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)\big)$ folgt $(u, v) \in I(Q)$ für alle $v \in U$. Insbesondere gilt also auch $(u, u) \in I(Q)$, was ein Widerspruch zu $\forall x \neg Q(x, x)$ ist.