Lösungsblatt 3

Hinweis: Neben add, mult, dec und sub dürfen in jeder Aufgabe alle Funktionen aus vorherigen Aufgaben als primitiv rekursiv vorausgesetzt werden.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$p = \mathrm{rec}(c_1^1, \mathrm{mult}(\pi_1^3, \pi_3^3))(\pi_2^2, \pi_1^2).$$

Geben Sie eine möglichst einfache Zuordnungsvorschfrift für p an.

Lösung

Es gilt $p\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x^y$ mit $0^0 := 1$. Dies kann durch direktes Rechnen überprüft werden. Für $f = \mathrm{rec}(c_1^1, \mathrm{mult}(\pi_1^3, \pi_3^3))$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \mathrm{rec}(c_1^1, \mathrm{mult}(\pi_1^3, \pi_3^3))(x,y) \\
&= \begin{cases} c_1^1(y) & \text{für } x = 0 \\ \mathrm{mult}(\pi_1^3, \pi_3^3)(f(x-1,y), x-1, y) & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \mathrm{mult}(\pi_1^3(f(x-1,y), x-1, y), \pi_3^3(f(x-1,y), x-1, y)) & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \mathrm{mult}(f(x-1,y), y) & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ f(x-1,y) \cdot y & \text{für } x \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Sieht man an dieser Stelle nicht sofort, dass $f(x, y) = y^x$ gilt, so kommt man schnell darauf, wenn man einige Funktionswerte auflistet:

$$\begin{aligned}
f(0,y) &= 1 \\
f(1,y) &= f(0,y) \cdot y = y \\
f(2,y) &= f(1,y) \cdot y = y^2 \\
f(3,y) &= f(2,y) \cdot y = y^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Für p gilt schließlich:

$$p(x,y) = f(\pi_2^2, \pi_1^2)(x,y) = f(\pi_2^2(x,y), \pi_1^2(x,y)) = f(y,x) = x^y.$$

Bemerkung: Für diese Aufgabe wurde der Ausdruck 0^0 als 1 definiert. Dies ist nicht immer der Fall! Siehe dazu `https://en.wikipedia.org/wiki/Zero_to_the_power_of_zero`.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind, indem Sie für jede Funktion einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

1. $\mathrm{zero}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\mathrm{leq}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
3. $\mathrm{eq}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
4. $\mathrm{ifzero}\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ (x, y, z) \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } x = 0 \\ z & \text{sonst} \end{cases}$
5. $\max\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } x \leq y \\ x & \text{sonst} \end{cases}$
6. $\Delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \sum_{i=0}^{x} i$

Lösung

1. $\mathrm{zero} = \mathrm{rec}(c_1^0, c_0^2) = \mathrm{sub}(c_1^1, \pi_1^1)$
2. $\mathrm{leq} = \mathrm{zero}(\mathrm{sub})$
3. $\mathrm{eq} = \mathrm{mult}(\mathrm{leq}, \mathrm{leq}(\pi_2^2, \pi_1^2))$
4. $\mathrm{ifzero} = \mathrm{rec}(\pi_1^2, \pi_4^4)$
5. $\max = \mathrm{add}(\mathrm{sub}, \pi_2^2) = \mathrm{ifzero}(\mathrm{leq}, \pi_1^2, \pi_2^2)$
6. $\Delta = \mathrm{rec}(c_0^0, \mathrm{add}(\pi_1^2, s(\pi_2^2)))$

Aufgabe 3

Sei $P\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion mit Wertebereich $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass der (dreistellige) *beschränkte Existenzoperator* $\exists_P^3\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\exists_P^3(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists \ell \leq x\colon P(\ell, y, z) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

Hinweis: $\exists_P^3$ ist eine Verallgemeinerungen des beschränkten Existenzoperators Q aus Vorlesungsfolie 10.6.

Lösung

$\exists_P^3 = \mathrm{rec}(P(c_0^2, \pi_1^2, \pi_2^2), \max(\pi_1^4, P(s(\pi_2^4), \pi_3^4, \pi_4^4)))$

Aufgabe 4

Sei $P\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion mit Wertebereich $\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass der (zweistellige) *beschränkte Maximumoperator* $\max_P^2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\max_P^2(x,y) = \begin{cases} \max\left\{k \le x \mid P(k,y) = 1\right\}, & \text{falls ein } k \le x \text{ existiert mit } P(k,y) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie für einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

Hinweis: $\max_P^2$ ist eine Verallgemeinerung des beschränkten Maximumoperators q aus Vorlesungsfolie 10.6.

Lösung

$\max_P^2 = \mathrm{rec}(c_0^1, \mathrm{ifzero}(P(s(\pi_2^3), \pi_3^3), \pi_1^3, s(\pi_2^3)))$