Lösungsblatt 4

Aufgabe 1

Sei $c\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die *Cantorsche Paarungsfunktion* aus Vorlesungseinheit 10. Zeigen Sie, dass c bijektiv ist und dass sowohl c als auch die Funktionen $e, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $e(n) = \pi_1^2(c^{-1}(n))$ und $f(n) = \pi_2^2(c^{-1}(n))$ primitiv rekursiv sind.

Hinweis: Beim Beweis der Injektivität von c ist folgende Monotonieeigenschaft hilfreich:

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{N}\colon x + y > x' + y' \implies c(x, y) > c(x', y').$$

Lösung

Aus Ergänzung 3 wissen wir, dass die Folge

$$\Delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\, n \mapsto \sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

der Dreieckszahlen primitiv rekursiv ist. Wegen $c = \mathrm{add}(\Delta(\mathrm{add}), \pi_1^2)$ ist auch c primitiv rekursiv. Zu zeigen ist nur, dass c bijektiv ist und dass die oben beschriebenen Funktionen $e, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv sind. Hierfür werden zwei Ansätze präsentiert. In beiden wird verwendet, dass die Funktion Δ (streng) monoton wächst. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nämlich:

$$\Delta(k) = \sum_{i=0}^{k} i < \sum_{i=0}^{k} i + k + 1 = \sum_{i=0}^{k+1} i = \Delta(k+1).$$

Man beachte, dass die Definitionen von e und f in einem Ansatz sich von den Definitionen in dem anderen Ansatz stark unterscheiden, die entstehenden Funktionen jedoch genau dieselben sind.

Erster Ansatz

Wir geben zuerst primitiv rekursive Funktionen e und f an und zeigen danach, dass die Funktion $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2,\, n \mapsto (e(n), f(n))$ die Umkehrfunktion von c ist. Dann folgt daraus, dass c bijektiv ist.

Aus Ergänzung 3 wissen wir, dass die Funktionen add, dec, Δ, eq und ifzero primitiv rekursiv sind. Betrachte nun die Funktionen $e, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}
e(0) &= 0 \\
e(n+1) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \Delta(e(n)+1) = n+1 \\ e(n)+1 & \text{sonst} \end{cases} \\
f(0) &= 0 \\
f(n+1) &= \begin{cases} e(n)+1, & \text{falls } \Delta(e(n)+1) = n+1 \\ f(n)-1 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

und $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ mit $d(n) = (e(n), f(n))$.

Dass $e(n) = \pi_1^2(d(n))$ und $f(n) = \pi_2^2(d(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist klar. Dass e und f primitiv rekursiv ist, folgt aus:

$$\begin{aligned}
e &= \mathrm{rec}(c_0^0, \mathrm{ifzero}(\mathrm{eq}(\Delta(s(\pi_1^2)), s(\pi_2^2)), s(\pi_1^2), c_0^2)) \\
f &= \mathrm{rec}(c_0^0, \mathrm{ifzero}(\mathrm{eq}(\Delta(s(e(\pi_2^2))), s(\pi_2^2)), \mathrm{dec}(\pi_1^2), s(e(\pi_2^2))).
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist also nur noch, dass c bijektiv ist und dass d die Umkehrfunktion von c ist. Hierfür ist es ausreichend folgende zwei Aussagen zu zeigen:

(1) c ist injektiv.

(2) c ist linksinvers zu d.

Dies tun wir in 3 Schritten.

Schritt 1: Beweis der Monotonieeigenschaft aus dem Hinweis

Seien $x, y, x', y' \in \mathbb{N}$ beliebig mit $x + y > x' + y'$. Dann gilt:

$$c(x,y) = \Delta(x+y) + x \geq \Delta(x'+y'+1) + x = \underbrace{\Delta(x'+y') + x'}_{=c(x',y')} + \underbrace{y'+1+x}_{\geq 1} > c(x',y').$$

Schritt 2: Beweis von (1)

Zu zeigen ist: $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{N}\colon c(x,y) = c(x',y') \implies (x,y) = (x',y')$.

Seien $x, y, x', y' \in \mathbb{N}$ beliebig mit $c(x,y) = c(x',y')$. Aus obiger Monotonieeigenschaft folgt $x + y = x' + y'$ und somit

$$c(x,y) = \Delta(x+y) + x = \Delta(x'+y') + x = c(x',y') - x' + x.$$

Wegen $c(x,y) = c(x',y')$ gilt $x = x'$ und mit $x + y = x' + y'$ auch $y = y'$.

Schritt 3: Beweis von (2)

Zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N}\colon c(d(n)) = n$.

Wir zeigen diese Aussage mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang

Es gilt $c(d(0)) = c(e(0), f(0)) = c(0,0) = 0$.

Induktionsschritt

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, für dieses n gelte die Induktionsvoraussetzung $c(d(n)) = n$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Für $\Delta(e(n)+1) = n+1$ gilt:

$$c(d(n+1)) = c(e(n+1), f(n+1)) = c(0, e(n)+1) = \Delta(e(n)+1) = n+1.$$

Für $\Delta(e(n)+1) \neq n+1$ gilt:

$$\begin{aligned} c(d(n+1)) &= c(e(n+1), f(n+1)) = c(e(n)+1, f(n)-1) \\ &= \Delta(e(n)+f(n)) + e(n) + 1 = c(e(n), f(n)) + 1 \overset{\text{IV}}{=} n+1. \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt $c(e(n+1), f(n+1)) = n+1$.

Zweiter Ansatz

Wir zeigen zuerst, dass c bijektiv ist und konstruieren danach primitiv rekursive Funktionen e und f, sodass $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $n \mapsto (e(n), f(n))$ die eindeutige Umkehrfunktion von c ist.

Dies tun wir in 3 Schritten.

Schritt 1: Beweis der Injektivität

(Analog zum Beweis im ersten Ansatz.)

Schritt 2: Beweis der Surjektivität

Zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \exists x, y \in \mathbb{N}\colon c(x,y) = n$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Setze $x = n - \Delta(m)$ und $y = m - x$, wobei m die größte natürliche Zahl mit $\Delta(m) \leq n$ sei. Dann gilt $x, y \in \mathbb{N}$ und

$$c(x,y) = \Delta(x+y) + x = \Delta(x + (m-x)) + n - \Delta(m) = n.$$

Man beachte, dass m existiert und eindeutig ist, da Δ streng monoton wächst.

Schritt 3: Konstruktion von e und f

Aus der Bijektivität von c und der einfachen Abschätzung $c(x,y) \geq x+y$ wissen wir, dass es zu einem gegebenen $n \in \mathbb{N}$ genau ein x und genau ein y mit $x, y \leq n$ und $c(x,y) = n$ gibt. Somit enthalten die Mengen

$$X = \{x \leq n \mid \exists y \leq n\colon c(x,y) = n\} \qquad \text{und} \qquad Y = \{y \leq n \mid \exists x \leq n\colon c(x,y) = n\}$$

jeweils genau ein Element und man kann e und f wie in der Vorlesung mittels $e(n) = \max X$ und $f(n) = \max Y$ definieren. Die dadurch entstehenden Funktionen sind genau dieselben wie im ersten Ansatz. Man beachte, dass ein Minimumoperator statt dem Maximumoperator dieselbe Funktionen liefern würde, da X und Y einelementig sind.

Da $P = \mathrm{eq}(c(\pi_1^3, \pi_2^3), \pi_3^3)$ primitiv rekursiv ist, ist $P' = \exists_P^3(\pi_2^2, \pi_1^2, \pi_2^2)$ und somit auch $e = \max^2_{P'}(\pi_1^1, \pi_1^1)$ primitiv rekursiv. Mit $P = \mathrm{eq}(c(\pi_2^3, \pi_1^3), \pi_3^3)$ statt $P = \mathrm{eq}(c(\pi_1^3, \pi_2^3), \pi_3^3)$ bekommt man einen primitiv rekursiven Ausdruck für f.

Für die Definitionen von $\exists_P^3$ und $\max_P^2$ siehe Ergänzungsblatt 3, Aufgaben 3 und 4.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ (x,y,z) \mapsto \left\lceil \log_2(y \dot{-} xz) \right\rceil,$$

die für alle $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ mit $xz < y$ definiert sei. Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung von μf an.

Lösung

Es gilt $\mu f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\mu f(y,z) = \begin{cases} \frac{y-1}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

für alle $(y,z) \in \mathbb{N}^2$ für die $y-1$ von z geteilt wird (d. h. $z \mid y-1$ bzw. $y \equiv 1 \mod z$). An den restlichen Stellen ist μf nicht definiert.

Hinweis: Alternativ könnte man auch

$$\mu f(y,z) = \begin{cases} \frac{y-1}{z} & \text{für } z \neq 0 \text{ und } y \equiv 1 \mod z \\ 0 & \text{für } z = 0 \text{ und } y = 1 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

schreiben. Für eine Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ bedeutet der Ausdruck $f(x_1,\ldots,x_k) = \perp$ nicht, dass f an der Stelle $(x_1,\ldots,x_k)$ den Wert $\perp$ einnimmt. Dieser ist ja kein Element von $\mathbb{N}$. Er stellt nur eine Kurzschreibweise für „f ist an der Stelle $(x_1,\ldots,x_k)$ nicht definiert“ dar. Entsprechend heißt $f(x_1,\ldots,x_k) = \perp$, dass f an der Stelle $(x_1,\ldots,x_k)$ definiert ist und somit $f(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}$ giltx.

Aufgabe 3

Geben Sie für jede der folgenden totalen Funktionen f eine möglichst einfache Beschreibung von μf an.

1. $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto y \dot{-} 2x$
2. $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ (x,y,z) \mapsto (y \dot{-} x) + (z \dot{-} x)$
3. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2 - 3x + 2$

Lösung

Hinweis: Für eine totale Funktion $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu f(x_1,\ldots,x_k) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid f(n,x_1,\ldots,x_k) = 0\}.$$

1. $\mu f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \mu f(y) &= \min \{n \in \mathbb{N} \mid y \dot{-} 2n = 0\} \\ &= \min \{n \in \mathbb{N} \mid y \leq 2n\} \\ &= \min \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{y}{2} \leq n\right\} \\ &= \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

2. $\mu f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}\mu f(y,z) &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y \dot- n) + (z \dot- n) = 0\}\\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y \dot- n) = 0 \wedge (z \dot- n) = 0\}\\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid y \leq n \wedge z \leq n\}\\ &= \max(y,z).\end{aligned}$$

3. $\mu f\colon \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}\mu f() &= \min\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n^2 - 3n + 2 = 0\right\}\\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid (n-1)(n-2) = 0\}\\ &= 1.\end{aligned}$$