Lösungsblatt 5

Aufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Sprachen L, dass diese für beliebige rekursiv aufzählbaren Sprachen $A, B, A_0, A_1, A_2, \ldots$ über Σ selbst rekursiv aufzählbar sind.

1. $L = A \cup B$
2. $L = AB$
3. $L = A \cap B$
4. $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$
5. $L = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$
6. $L = A^*$

Lösung

Aussagen 1, 2, 3 und 6 sind richtig, 4 und 5 falsch. Wir beweisen Aussagen 1, 2, 3 und 6 durch direkte Anwendung der Definition auf Vorlesungsfolie 14.4. Alternative Ansätze verwenden die Charakterisierungen auf Vorlesungsfolie 14.7. Man überzeuge sich bitte selbst davon, dass die angegebene Funktion f_L in den ersten drei Teilaufgaben tatsächlich total und berechenbar ist und die Gleichung $f_L(\mathbb{N}) = L$ erfüllt. Bei Teilaufgabe 6 werden diese drei Eigenschaften explizit gezeigt.

Hinweis: Mit e und f bezeichnen wir die Umkehrungen der Cantorschen Paarungsfunktion. Da diese primitiv rekursiv sind, sind sie insbesondere total und berechenbar.

1. Fall 1: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Dann ist $L = B$ oder $L = A$, d. h. L ist nach Annahme rekursiv aufzählbar.

   Fall 2: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Dann gibt es totale und berechenbare Funktionen $f_A, f_B \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $f_A(\mathbb{N}) = A$ und $f_B(\mathbb{N}) = B$. Die Funktion $f_L \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit

   $$f_L(n) = \begin{cases} f_A(\frac{n}{2}) & \text{für } n \text{ gerade} \\ f_B(\frac{n-1}{2}) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

   ist total und berechenbar und erfüllt $f_L(\mathbb{N}) = L$.

2. Fall 1: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Dann ist $L = \emptyset$ per Definition rekursiv aufzählbar.

   Fall 2: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Dann gibt es totale und berechenbare Funktionen $f_A, f_B \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $f_A(\mathbb{N}) = A$ und $f_B(\mathbb{N}) = B$. Die Funktion $f_L \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit

   $$f_L(n) = f_A(e(n)) f_B(f(n))$$

   ist total und berechenbar und erfüllt $f_L(\mathbb{N}) = L$.

3. Fall 1: $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $L = \emptyset$ per Definition rekursiv aufzählbar.

   Fall 2: $A \cap B \neq \emptyset$. Dann gibt es ein Wort $w \in A \cap B$ und totale und berechenbare Funktionen $f_A, f_B \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $f_A(\mathbb{N}) = A$ und $f_B(\mathbb{N}) = B$. Die Funktion $f_L \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit
   $$f_L(n) = \begin{cases} f_A(e(n)), & \text{falls } f_A(e(n)) = f_B(f(n)) \\ w & \text{sonst} \end{cases}$$
   ist total und berechenbar und erfüllt $f_L(\mathbb{N}) = L$.

4. Sei $\overline{H} = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ das Komplement des Halteproblems H. Die Menge $A_i = \{u_i\}$ ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ endlich und somit rekursiv aufzählbar, aber $\overline{H} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ nicht.

   Hinweis: Dass totale und berechenbare Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $f_i(\mathbb{N}) = A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ existieren heißt nicht, dass die Funktion $f_L \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$, $n \mapsto f_{e(n)}(f(n))$ ebenfalls berechenbar ist. Im Allgemeinen kann eine Turingmaschine nicht unendlich viele Turingmaschinen simulieren, weil sie dazu eventuell unendlich viele Zustände bräuchte. Anders ist es, wenn eine Turingmaschine unendlich viele Turingmaschinen generieren bzw. diese aufzählen kann, aber das kann hier nicht angenommen werden.

5. Sei $H = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ das Halteproblem. Die Menge $A_i = \{0,1\}^* \setminus \{v_i\}$ ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ regulär und somit rekursiv aufzählbar, aber $\overline{H} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ nicht.

6. Fall 1: $A = \emptyset$. Dann ist $L = \{\varepsilon\}$ endlich und somit rekursiv aufzählbar.

   Fall 2: $A \neq \emptyset$. Dann gibt es eine totale und berechenbare Funktion $f_A \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $f_A(\mathbb{N}) = A$. Wir wissen, dass die Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+1}$, $n \mapsto \big(d_0(n), \ldots, d_k(n)\big)$ mit $d_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto e(f^i(n))$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^{k+1}$ ist. Die Funktion
   $$f_L \colon \mathbb{N} \to \Sigma^*,\ n \mapsto \prod_{i=1}^{d_0(n)} f_A(d_i(n))$$
   ist dann total und berechenbar und erfüllt die Gleichung $f_L(\mathbb{N}) = L$.

   Dass f_L total ist, folgt sofort daraus, dass die Funktionen f_A und $d_0, d_1, d_2, \ldots$ total sind. f_L ist berechenbar, da es beispielsweise von folgendem Programm (in Pseudocode) berechnet wird:

   Eingabe: $n \in \mathbb{N}$
   Ausgabe: $f_L(n)$

   ```
   w := ε
   loop e(n) do:
       n := f(n)
       w := w f_A(e(n))
   return w
   ```

   Um die Gleichung $f_L(\mathbb{N}) = L$ zu beweisen, zeigen wir, dass für jedes $w \in L$ mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_L(n) = w$ gefunden werden kann. Sei hierfür $w \in L$ beliebig.

Dann existieren eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und Wörter $w_1, \ldots, w_k \in A$ mit $w = \prod_{i=1}^{k} w_i$. Wegen $f_A(\mathbb{N}) = A$ existieren Zahlen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $f_A(n_i) = w_i$ für alle $i \in [k]$. Für $n = \langle k, n_1, \ldots, n_k \rangle$ gilt dann

$$f_L(n) = \prod_{i=1}^{d_0(n)} f_A(d_i(n)) = \prod_{i=1}^{k} f_A(n_i) = \prod_{i=1}^{k} w_i = w.$$

Man beachte, dass diese Argumentation auch für $w = \varepsilon$ gilt. Dann ist $k = 0$, $n = \langle 0 \rangle = c(0,0) = 0$ und $f_L(n) = \prod_{i=1}^{0} f_A(d_i(n)) = \varepsilon$ (leere Konkatenation).

Bemerkung: Hier wurden die Codierfunktion $\langle \cdot \rangle$ und die Umkehrungen $d_0, \ldots, d_k$ aus Schönings Buch verwendet. Die entsprechenden Definitionen findet man in der 5. Auflage auf Seiten 103 und 104.

Aufgabe 2

Sei L die Menge aller Gödelisierungen von Turingmaschinen, die eine Funktion mit unendlicher Bildmenge berechnen, d. h. :

$$L = \{w \mid \text{die Bildmenge der von } M_w \text{ berechneten Funktion ist unendlich}\}.$$

Zeigen Sie, dass L unentscheidbar ist, indem Sie

1. den Satz von Rice anwenden.
2. $H_0 \leq L$ zeigen.

Lösung

Hinweis: $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n$ ist die identische Abbildung auf $\mathbb{N}$ und $\Omega \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nirgends definierte Funktion.

1. Es gilt $L = \mathcal{C}(\mathcal{S})$ für

   $$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{R} \mid \text{die Bildmenge von } f \text{ ist unendlich}\}.$$

   Aus $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ und $\Omega \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ folgt $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{R}$. Somit ist $\mathcal{S}$ nichttrivial und L nach dem Satz von Rice unentscheidbar. □

2. Wegen $\Omega \notin \mathcal{S}$ verwenden wir die Konstruktion aus dem 2. Fall im Beweis des Satzes von Rice. Als q eignet sich beispielsweise die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

   Wähle also $f \colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, wobei $f(w)$ der Gödelindex einer Turingmaschine ist, die wie folgt arbeitet:

   - Simuliere zuerst M_w auf ε (z. B. auf einem separaten, leeren Band).
   - Gehe dann in einen Endzustand ohne das Eingabewort zu verändern.

   Dann ist f total und berechenbar und für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt

   $$\begin{aligned} w \in H_0 &\implies M_w \text{ hält auf } \varepsilon \\ &\implies M_{f(w)} \text{ gibt jede Eingabe unverändert zurück} \\ &\implies M_{f(w)} \text{ berechnet } \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \\ &\implies f(w) \in L \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w \notin H_0 &\implies M_w \text{ hält nicht auf } \varepsilon \\ &\implies M_{f(w)} \text{ hält auf keiner Eingabe} \\ &\implies M_{f(w)} \text{ berechnet } \Omega \\ &\implies f(w) \notin L, \end{aligned}$$

also $w \in H_0 \iff f(w) \in L$. Wegen $H_0 \leq L$ und H_0 unentscheidbar, ist auch L unentscheidbar. □

Erinnerung: Die Äquivalenz $w \in H_0 \iff w \in L$ gilt genau dann, wenn die Implikationen $w \in H_0 \implies w \in L$ und $w \in L \implies w \in H_0$ gelten. Die letztere ist äquivalent zu $w \notin H_0 \implies w \notin L$.

Aufgabe 3

Seien Σ ein Alphabet und $u, v \in \Sigma^*$ Wörter über Σ. Wir betrachten die Menge $L_{u,v}$ aller Gödelindizes von Turingmaschinen, die u akzeptieren, aber v nicht, d. h. :

$$L_{u,v} = \{w \mid u \in T(M_w) \wedge v \notin T(M_w)\}\,.$$

1. Zeigen Sie: Wenn $u \neq v$, dann $H_0 \leq L_{u,v}$.
2. Zeigen Sie: Wenn $u \neq v$, dann $\overline{H_0} \leq L_{u,v}$.
3. Was kann man über die semi- und die co-semi-Entscheidbarkeit von $L_{u,v}$ sagen?

Hinweis: Eine Sprache ist genau dann co-semi-entscheidbar, wenn ihr Komplement semi-entscheidbar ist.

Lösung

Diese Aufgabe konnte aus Zeitgründen nicht besprochen werden. Aufgabe und Lösung werden demnächst als Teil eines Zusatzblattes veröffentlicht.

Aufgabe 4

Wir betrachten folgende Entscheidungsprobleme für Turingmaschinen:

(a) Das Leerheitsproblem EMP
Eingabe: Eine Turingmaschine M
Frage: Ist die von M akzeptierte Sprache leer?

(b) Das Endlichkeitsproblem FIN
Eingabe: Eine Turingmaschine M
Frage: Ist die von M akzeptierte Sprache endlich?

(c) Das Regularitätsproblem REG
Eingabe: Eine Turingmaschine M
Frage: Ist die von M akzeptierte Sprache regulär?

Zeigen Sie:

1. $\textsc{Emp}$ ist unentscheidbar.
2. $\textsc{Emp} \leq \textsc{Fin}$.
3. $\textsc{Fin} \leq \textsc{Reg}$.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\textsc{Emp} &= \{w \mid T(M_w) \text{ ist leer}\}\,, \\
\textsc{Fin} &= \{w \mid T(M_w) \text{ ist endlich}\}\,, \\
\textsc{Reg} &= \{w \mid T(M_w) \text{ ist regulär}\}\,.
\end{aligned}$$

1. Es gilt $\textsc{Emp} = \mathcal{C}(\mathcal{S})$ für

   $$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{R} \mid f \text{ ist nirgends definiert}\}\,.$$

   Aus $\Omega \in \mathcal{S}$ und $\mathrm{id} \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ folgt $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{R}$. Somit ist $\mathcal{S}$ nichttrivial und $\textsc{Emp}$ nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

   Hinweis: Verwendet man die Reduktion aus dem Beweis des Satzes von Rice, so muss man, da Ω in $\mathcal{S}$ enthalten ist, $\overline{H_0}$ auf $\textsc{Emp}$ reduzieren. Dies entspricht dem 1. Fall im Beweis mit $q = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

2. Wähle $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, wobei $f(w)$ der Gödelindex einer Turingmaschine ist, die unabhängig von der Eingabe mit Dove-Tailing testet, ob M_w irgendein Wort akzeptiert und falls ja, sofort in einen Endzustand geht.

   Dann ist f total und berechenbar und für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt

   $$\begin{aligned}
   w \in \textsc{Emp} &\implies T(M_w) = \emptyset \\
   &\implies M_{f(w)} \text{ hält auf keiner Eingabe} \\
   &\implies |T(M_{f(w)})| = 0 \\
   &\implies f(w) \in \textsc{Fin}
   \end{aligned}$$

   und

   $$\begin{aligned}
   w \notin \textsc{Emp} &\implies T(M_w) \neq \emptyset \\
   &\implies M_{f(w)} \text{ hält auf jeder Eingabe} \\
   &\implies |T(M_{f(w)})| = \infty \\
   &\implies f(w) \notin \textsc{Fin},
   \end{aligned}$$

   also $w \in \textsc{Emp} \iff f(w) \in \textsc{Fin}$.

3. Diese Aufgabe wurde auf die 6. Ergänzung verschoben.