Lösungsblatt 8

Aufgabe 1

Zeigen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$:

1. Das folgende Entscheidungsproblem liegt in P.

   MAX-k-SAT
   Eingabe: Eine boolesche Formel F.
   Frage: Gibt es ein Modell für F, das höchstens k Variablen in F mit 1 belegt?

2. Das folgende Entscheidungsproblem ist NP-vollständig.

   MIN-k-SAT
   Eingabe: Eine boolesche Formel F.
   Frage: Gibt es ein Modell für F, das mindestens k Variablen in F mit 1 belegt?

Lösung

1. Sei n die Länge der Kodierung von F. Dann kann F höchstens n verschiedene Variablen enthalten und es gibt somit höchstens

   $$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$$

   verschiedene Belegungen, die höchstens k Variablen mit 1 Belegen. Da k konstant und $\binom{n}{i}$ ein Polynom in n von Grad i ist, gibt es polynomiell viele solche Belegungen. Diese können in polynomieller Zeit durchprobiert werden.

2. MIN-k-SAT $\in \mathsf{NP}$

   Mit *guess and check*: Eine NTM kann die Belegung aller Variablen in F raten und in polynomieller Zeit überprüfen, ob mindestens k Variablen mit 1 belegt wurden und die entstehende Belegung ein Modell ist.

   MIN-k-SAT ist NP-hart

   Wir zeigen SAT $\leq_p$ MIN-k-SAT. Hierfür konstruieren wir zu einer gegebenen booleschen Formel F mit Variablen $x_1, \ldots, x_m$ die boolesche Formel

   $$F' = F \wedge x_{m+1} \wedge \ldots \wedge x_{m+k}.$$

   Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Konstruktion für jede Formel F in Polynomialzeit durchgeführt werden kann. Zu zeigen ist noch, dass F genau dann erfüllbar ist, wenn ein Modell für F' existiert, das mindestens k Variablen mit 1 belegt.

„$\Longrightarrow$“: Sei F erfüllbar und $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Dann ist

$$\mathcal{A}'\colon \{x_1, \dots, x_{m+k}\} \to \{0,1\},\ x_i \mapsto \begin{cases} \mathcal{A}(x_i) & \text{für } i \leq m \\ 1 & \text{für } i > m \end{cases}$$

ein Modell für F', das mindestens k Variablen mit 1 belegt (z. B. $x_{m+1}, \dots, x_{m+k}$).

„$\Longleftarrow$“: Jedes Modell für F' erfüllt jede der Formeln $F, x_{m+1}, \dots, x_{m+k}$, also insbesondere auch F.

Aufgabe 2

Das Spezialisierungsproblem besteht darin, jeden Mitarbeiter eines Schichtbetriebs auf ein Arbeitsbereich zu spezialisieren, sodass in jeder Schicht für jeden Arbeitsbereich ein Spezialist vorhanden ist.

Formal betrachten wir das folgende Entscheidungsproblem:

<u>Spezialisierung</u>
Gegeben: Endliche Mengen M, A und $S_1, \dots, S_k \subseteq M$.
Frage: Gibt es eine Abbildung $s\colon M \to A$ mit $s(S_i) = A$ für alle $i \in [k]$?

Des Weiteren sei 2-Spezialisierung das obige Problem für festes $k = 2$.

Zeigen Sie:

1. 2-Spezialisierung $\in$ P.
2. Spezialisierung ist NP-vollständig.

Lösung

1. Für den Fall $k = 2$ existiert eine solche Abbildung s genau dann, wenn $|A| \leq |S_1|, |S_2|$ gilt. Diese Eigenschaft kann von einer DTM in polynomieller Zeit überprüft werden.

2. <u>Spezialisierung $\in$ NP</u>

   Mit *guess and check*: Eine NTM kann den Wert von $s(m)$ für alle $m \in M$ raten und in polynomieller Zeit überprüfen, ob für alle $i \in [k]$ die Gleichung $s(S_i) = A$ erfüllt ist.

   <u>Spezialisierung ist NP-hart</u>

   Wir zeigen 3KNF-SAT $\leq_p$ Spezialisierung. Hierfür konstruieren wir zu einer gegebenen 3KNF-SAT-Formel F mit ℓ Klauseln und Variablen $x_1, \dots, x_m$ eine Spezialisierung-Instanz $(M, A, S_1, \dots, S_{\ell+m})$ mit $M = \{x_0\} \cup \{x_i \mid i \in [m]\} \cup \{\neg x_i \mid i \in [m]\}$, $A = \{0,1\}$ und

$$S_i = \begin{cases} \{x_0\} \cup K_i & \text{für } 1 \leq i \leq \ell \\ \{x_{i-\ell}, \neg x_{i-\ell}\} & \text{für } \ell < i \leq \ell + m, \end{cases}$$

   für alle $i \in [\ell + m]$, wobei K_i die Menge aller Literale in der i-ten Klausel von F sei.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Konstruktion für jede Formel F in Polynomialzeit durchgeführt werden kann. Zu zeigen ist noch, dass F genau dann erfüllbar ist, wenn für die entstehenden Mengen M, A und $S_1, \dots, S_{\ell+m}$ eine Abbildung $s\colon M \to A$ mit $s(S_i) = A$ für alle $i \in [\ell + m]$ existiert.

„$\Longrightarrow$“: Sei F erfüllbar und $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Dann existiert für jedes $i \in [\ell]$ ein Literal $x \in K_i$ mit $\mathcal{A}(x) = 1$. Dann erfüllt die Funktion $s\colon M \to A$ mit

$$s(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ \mathcal{A}(x_i) & \text{für } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

die Gleichung $s(S_i) = \{0, 1\}$ für alle $i \in [\ell + m]$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $s\colon M \to A$ eine Abbildung mit $s(S_i) = A$ für alle $i \in [\ell + m]$. O. B. d. A. sei $s(x_0) = 0$ (sonst betrachte $s'\colon M \to A$ mit $s'(x) = 1 - s(x)$). Dann existiert für jedes $i \in [m]$ ein $x \in K_i$ mit $s(x) = 1$. Aufgrund der Definition von $S_{\ell+1}, \dots, S_{\ell+m}$ gilt außerdem $s(\neg x_i) = 1 - s(x_i)$ für alle $i \in [m]$. Also ist s ein Modell für F.

Hinweis: Alternativ kann man 3-Färbbarkeit $\leq_p$ Spezialisierung zeigen, indem man aus einem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ eine Spezialisierung-Instanz $(M, A, S_1, \dots, S_m)$ konstruiert mit $M = V$, $A = [3]$ und $S_i = e_i \cup \{v_{n+i}\}$ für alle $i \in [m]$.

Aufgabe 3

Das Knotenfärbbarkeitsproblem (englisch *Vertex coloring problem*) besteht darin, die Knoten eines gegebenen Graphen so zu färben, dass keine zwei benachbarten Knoten mit derselben Farbe gefärbt werden.

Formal betrachten wir das folgende Entscheidungsproblem:

<u>Färbbarkeit</u>
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Abbildung $\varphi\colon V \to [k]$ mit $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$?

Des Weiteren sei k-Färbbarkeit das obige Problem für ein festes $k \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass 3-Färbbarkeit NP-vollständig ist.

1. Zeigen Sie: 3-Färbbarkeit $\leq_p$ 4-Färbbarkeit.
2. Zeigen Sie: 4-Färbbarkeit $\leq_p$ 3-Färbbarkeit.

Lösung

1. Sei x eine Kodierung eines Graphen $G = (V, E)$. Sei o. B. d. A. $v \notin V$. Wähle $f(x)$ als eine Kodierung des Graphen $G' = (V', E')$ mit $V' = V \cup \{v\}$ und $E' = E \cup \{\{u, v\} \mid u \in V\}$. Dann ist f total und in Polynomialzeit berechenbar und es gilt

   $$x \in \text{3-Färbbarkeit} \iff f(x) \in \text{4-Färbbarkeit}$$

   für alle 3-Färbbarkeit-Instanzen x.

2. Mit *guess and check* kann sehr leicht gezeigt werden, dass 4-FÄRBBARKEIT $\in \mathsf{NP}$ gilt. Da 3-FÄRBBARKEIT NP-hart ist, gilt $L \leq_p$ 3-FÄRBBARKEIT für alle $L \in \mathsf{NP}$, insbesondere auch für $L =$ 4-FÄRBBARKEIT.