Lösungsblatt 9

Aufgabe 1

Das folgende Problem besteht darin, für gegebene Listen von Studierenden, Lehrveranstaltungen, Terminen und Anmeldungen zu entscheiden, ob jeder Lehrveranstaltung ein Termin so zugeordnet werden kann, dass jeder Studierende einen überschneidungsfreien Stundenplan hat. Formal definieren wir das Entscheidungsproblem STUNDENPLAN wie folgt:

STUNDENPLAN
Eingabe: Endliche Mengen S, L und T, sowie eine Relation $A \subseteq S \times L$.
Frage: Gibt es eine totale Funktion $g\colon L \to T$, sodass alle $\ell_1, \ell_2 \in L$, für die $\ell_1 \neq \ell_2$ und $\exists s \in S\colon (s, \ell_1), (s, \ell_2) \in A$ gilt, die Ungleichung $g(\ell_1) \neq g(\ell_2)$ erfüllen?

S, L, T und A stellen jeweils Mengen von Studierenden, Lehrveranstaltungen, Terminen und Anmeldungen dar. $(s, \ell) \in A$ besagt intuitiv, dass s sich für die Lehrveranstaltung ℓ angemeldet hat.

1. Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-vollständig ist.
2. Geben Sie eine Polynomialzeitreduktion von STUNDENPLAN auf SAT an. Sie brauchen die Korrektheit Ihrer Polynomialzeitreduktion nicht zu beweisen.

Lösung

1. STUNDENPLAN $\in$ NP

   Mit *guess and check*: Die nichtdeterministische Turingmaschine rät den Wert von $g(\ell)$ für alle $\ell \in L$ und überprüft für alle $\ell_1, \ell_2 \in L$ mit $\ell_1 \neq \ell_2$ und $\exists s \in S\colon (s, \ell_1), (s, \ell_2) \in A$, ob $g(\ell_1) \neq g(\ell_2)$ gilt. Man kann sich leicht überlegen, warum dies in polynomieller Zeit geht.

   STUNDENPLAN ist NP-hart

   Wir zeigen FÄRBBARKEIT $\leq_p$ STUNDENPLAN. Sei x eine Codierung über einem Alphabet Σ einer FÄRBBARKEIT-Instanz (V, E, k), wobei (V, E) ein endlicher Graph und $k \in \mathbb{N}$ ist. Wähle $f(x)$ als eine Codierung über einem Alphabet Γ der STUNDENPLAN-Instanz (S, L, T, A) mit $S = E$, $L = V$, $T = [k]$ und

   $$A = \{(e, v) \in E \times V \mid v \text{ und } e \text{ sind inzident, d. h. } v \in e\}.$$

   Man erkennt, dass f total und in polynomieller Zeit berechenbar ist. Zu zeigen ist für alle $x \in \Sigma^*$ die Äquivalenz

   $$x \in \text{FÄRBBARKEIT} \iff f(x) \in \text{STUNDENPLAN}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $x \in$ FÄRBBARKEIT genau dann gilt, wenn eine Funktion $\varphi\colon V \to [k]$ existiert mit

$$\forall v_1, v_2 \in V\colon \{v_1, v_2\} \in E \implies \varphi(v_1) \neq \varphi(v_2).$$

Wegen

$$\begin{aligned}\{v_1, v_2\} \in E &\iff v_1 \neq v_2 \wedge \exists e \in E\colon v_1, v_2 \in e \\ &\iff v_1 \neq v_2 \wedge \exists s \in E\colon (s, v_1), (s, v_2) \in A\end{aligned}$$

ist dies genau dann der Fall, wenn $f(x) \in$ STUNDENPLAN gilt.

Da FÄRBBARKEIT NP-hart ist, ist STUNDENPLAN ebenfalls NP-hart und somit auch NP-vollständig.

2. Sei x eine Codierung einer STUNDENPLAN-Instanz (S, L, T, A) über einem Alphabet Σ. Wähle $f(x)$ als Codierung der folgenden booleschen Formel

$$F = \left(\bigwedge_{\ell \in L} \bigvee_{t \in T} x_{\ell,t}\right) \wedge \left(\bigwedge_{(\ell,t_1,t_2) \in X} \neg(x_{\ell,t_1} \wedge x_{\ell,t_2})\right) \wedge \left(\bigwedge_{(\ell_1,\ell_2,t) \in Y} \neg(x_{\ell_1,t} \wedge x_{\ell_2,t})\right)$$

mit Variablen aus $V = \{x_{\ell,t} \mid \ell \in L \wedge t \in T\}$, wobei X und Y folgende Mengen sind:

$$\begin{aligned}X &= \{(\ell, t_1, t_2) \mid \ell \in L \wedge t_1, t_2 \in T \wedge t_1 \neq t_2\}\,, \\ Y &= \{(\ell_1, \ell_2, t) \mid \ell_1, \ell_2 \in L \wedge t \in T \wedge \ell_1 \neq \ell_2 \wedge \exists s \in S\colon (s, \ell_1), (s, \ell_2) \in A\}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung zu Polynomialzeitreduktionen auf SAT*:*

Die Polynomialzeitreduktion eines NP-vollständigen Problems auf SAT hat den Vorteil, dass das Problem mithilfe eines SAT-Lösers (engl. SAT-*solver*) gelöst werden kann. Aufgrund der enormen Fortschritte, die in den letzten Jahren in der Entwicklung von SAT-Lösern gemacht wurden, ist die Reduktion auf SAT nicht nur einfach, sondern oft auch schneller als das problemspezifische Lösen.

Aufgabe 2

Eine *Sprachklasse* ist eine Menge von formalen Sprachen. Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ sind $\mathsf{co}\mathcal{C}$ und $\overline{\mathcal{C}}$ ebenfalls Sprachklassen mit $\mathsf{co}\mathcal{C} = \left\{L \,\middle|\, \overline{L} \in \mathcal{C}\right\}$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{L \mid L \notin \mathcal{C}\}$.

1. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Sprachklasse. Zeigen Sie:
   (a) $\mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}) = \mathcal{C}$
   (b) $\overline{\mathsf{co}\mathcal{C}} = \mathsf{co}\overline{\mathcal{C}}$
2. Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ beliebige Sprachklassen. Zeigen Sie:

$$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \iff \mathsf{co}\mathcal{C}_1 \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}_2.$$

3. Zeigen Sie, dass eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ genau dann unter Komplement abgeschlossen ist, wenn $\mathcal{C} = \mathsf{co}\mathcal{C}$ gilt.
4. Geben Sie entweder eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ mit der jeweiligen Eigenschaft an oder begründen Sie, warum keine solche Sprachklasse existieren kann.

(a) $\mathcal{C} = \mathsf{co}\mathcal{C}$

(b) $\mathcal{C} \subsetneq \mathsf{co}\mathcal{C}$

(c) $\mathsf{co}\mathcal{C} \subsetneq \overline{\mathcal{C}}$

(d) $\mathsf{co}\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{C}$

(e) $\overline{\mathcal{C}} = \mathsf{co}\mathcal{C}$

(f) $\overline{\mathcal{C}} \subsetneq \mathsf{co}\mathcal{C}$

Lösung

1. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Sprachklasse. Zeigen Sie:

   (a) Für jede beliebige Sprache L gilt:

   $$L \in \mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}) \iff \overline{L} \in \mathsf{co}\mathcal{C} \iff \overline{\overline{L}} \in \mathcal{C} \iff L \in \mathcal{C}.$$

   (b) Für jede beliebige Sprache L gilt:

   $$L \in \overline{\mathsf{co}\mathcal{C}} \iff L \notin \mathsf{co}\mathcal{C} \iff \overline{L} \notin \mathcal{C} \iff \overline{L} \in \overline{\mathcal{C}} \iff L \in \mathsf{co}\overline{\mathcal{C}}.$$

2. Wir zeigen beide Richtungen getrennt voneinander.

„$\Longrightarrow$“: Angenommen, $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$. Dann gilt für jede beliebige Sprache L:

$$L \in \mathsf{co}\mathcal{C}_1 \implies \overline{L} \in \mathcal{C}_1 \implies \overline{L} \in \mathcal{C}_2 \implies L \in \mathsf{co}\mathcal{C}_2.$$

„$\Longleftarrow$“: Angenommen, $\mathsf{co}\mathcal{C}_1 \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}_2$. Dann gilt nach „$\Longrightarrow$“ und Teilaufgabe 1 (a):

$$\mathcal{C}_1 = \mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}_1) \subseteq \mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2.$$

3. $\mathcal{C}$ ist genau dann unter Komplement abgeschlossen, wenn für jedes $L \in \mathcal{C}$ gilt: $\overline{L} \in \mathcal{C}$, d. h. wenn $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}$ gilt. Dass diese Inklusion aus der Gleichheit $\mathcal{C} = \mathsf{co}\mathcal{C}$ folgt, ist klar. Für die andere Richtung nehmen wir $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}$ an und zeigen:

   $$\mathcal{C} \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C} \subseteq \mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

4. (a) Jede Sprachklasse, die unter Komplement abgeschlossen ist, besitzt diese Eigenschaft, z. B. REG, DCFL, CSL und R. Auch die leere Klasse $\emptyset$ und die Klasse aller Sprachen erfüllen die Eigenschaft.

   (b) Eine solche Sprachklasse kann nicht existieren, denn aus $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}$ folgt $\mathsf{co}\mathcal{C} \subseteq \mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

   (c) Solche Sprachklassen sind beispielsweise die Klasse FIN aller endlichen Sprachen und die leere Klasse $\emptyset$.

   (d) Eine solche Sprachklasse kann nicht existieren, denn aus $\mathsf{co}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$ folgt $\mathcal{C} = \mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}) \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}$.

   (e) Eine solche Sprachklasse ist $\mathcal{C} = \{L \mid \varepsilon \in L\}$.

   (f) Solche Sprachklassen sind beispielsweise die Klasse $\overline{\mathsf{FIN}}$ aller unendlichen Sprachen und die Klasse aller Sprachen.