Lösungsblatt 12

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für jedes der gegebenen Klassenpaare, welche Klasse in der jeweils anderen als Teilmenge enthalten ist und welche nicht. Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $\mathsf{coNSPACE}(2^n)$ und $\mathsf{DSPACE}(5^n)$
2. $\mathsf{NSPACE}\big(2^{(\log n)^2}\big)$ und $\mathsf{DSPACE}\big(n^{\mathcal{O}(\log n)}\big)$
3. $\mathsf{NTIME}(n)$ und $\mathsf{DTIME}(n^{n+2})$

Hinweis: Wie üblich definieren wir $\log = \log_2$.

Lösung

Für die Beweise werden einige der folgenden Aussagen aus der Vorlesung verwendet:

(a) Beziehungen zwischen:
- $\mathcal{C}(f)$ und $\mathcal{C}(\mathcal{O}(f))$ für alle $\mathcal{C} \in \{\mathsf{DTIME}, \mathsf{NTIME}, \mathsf{DSPACE}, \mathsf{NSPACE}\}$.
- $\mathsf{DTIME}(f)$, $\mathsf{NTIME}(f)$, $\mathsf{DSPACE}(f)$, $\mathsf{NSPACE}(f)$ und $\mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(f)})$.

(b) Der Satz von Savitch

(c) Die Hierarchiesätze

(d) Der Satz von Immerman und Szelepcsényi

Bei jeder Anwendung einer dieser Aussagen sollte überprüft werden, dass alle notwendigen Bedingungen erfüllt sind. Dies schreiben wir hier nicht explizit dazu.

Hinweis: Für Mengen A, B und X mit $X \subseteq A$ und Funktionen $f\colon A \to B$ und $F\colon A \to \mathcal{P}(B)$ definiert man üblicherweise (1) $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ und (2) $F(X) = \bigcup_{x\in X} F(x)$. Beispielsweise gilt:

$$\mathsf{DSPACE}\big(n^{\mathcal{O}(\log n)}\big) \overset{(1)}{=} \mathsf{DSPACE}\left\{n^{f(n)} \,\middle|\, f \in \mathcal{O}(\log n)\right\} \overset{(2)}{=} \bigcup_{f\in\mathcal{O}(\log)} \mathsf{DSPACE}(n^{f(n)}).$$

1. Wegen

$$\mathsf{NSPACE}(2^n) \subseteq \mathsf{DSPACE}((2^n)^2) = \mathsf{DSPACE}(4^n) \subsetneq \mathsf{DSPACE}(5^n)$$

ist $\mathsf{NSPACE}(2^n)$ eine echte Teilmenge von $\mathsf{DSPACE}(5^n)$.

2. Wegen

$$\begin{aligned}\mathsf{NSPACE}(2^{(\log n)^2}) &= \mathsf{NSPACE}(n^{\log n}) \subseteq \mathsf{DSPACE}((n^{\log n})^2) = \mathsf{DSPACE}(n^{2\log n})\\ &\subsetneq \mathsf{DSPACE}(n^{3\log n}) \subseteq \bigcup_{f\in\mathcal{O}(\log)} \mathsf{DSPACE}(n^{f(n)}) = \mathsf{DSPACE}(n^{\mathcal{O}(\log n)})\end{aligned}$$

ist $\mathsf{NSPACE}(2^{(\log n)^2})$ eine echte Teilmenge von $\mathsf{DSPACE}(n^{\mathcal{O}(\log n)})$.

3. Wegen

$$\begin{aligned}\mathsf{NTIME}(n) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}) &= \bigcup_{f\in\mathcal{O}(n)} \mathsf{DTIME}(2^{f(n)}) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{n\log n})\\ &\subsetneq \mathsf{DTIME}(n^2 2^{n\log n}) = \mathsf{DTIME}(n^{n+2})\end{aligned}$$

ist $\mathsf{NTIME}(n)$ eine echte Teilmenge von $\mathsf{DTIME}(n^{n+2})$.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Implikationen gelten für beliebige Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $\mathsf{DTIME}(f) = \mathsf{DTIME}(g) \implies f \in \Theta(g)$
2. $f \in \Theta(g) \implies \mathsf{DTIME}(f) = \mathsf{DTIME}(g)$

Hinweise:

- Es gilt $f \in \Theta(g)$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$ gilt.
- Diese Aufgabe wurde nachträglich etwas umformuliert.

Lösung

Beide Implikationen sind falsch. Wir widerlegen sie mit Gegenbeispielen.

1. Wegen $n^2 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Satz von Borodin eine Funktion $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $s(n) \geq n + 1$ und

$$\mathsf{DTIME}(s(n)) = \mathsf{DTIME}(s(n)^2).$$

Angenommen, es gilt $s(n) \in \Theta(s(n)^2)$. Dann existieren wegen $s(n)^2 \in \mathcal{O}(s(n))$ Konstanten $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $s(n)^2 \leq cs(n)$ und somit auch $s(n) \leq c$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Für $n = \max\{c, n_0\}$ gilt jedoch $n \geq n_0$, aber auch

$$s(n) \geq n + 1 \geq c + 1 > c,$$

ein Widerspruch!

2. Wir geben zwei Gegenbeispiele an:
   - Es gilt $2 \in \Theta(1)$, aber $\{a\} \in \mathsf{DTIME}(2) \setminus \mathsf{DTIME}(1)$.
   - Es gilt $2n \in \Theta(n)$, aber $\mathsf{DTIME}(n) \neq \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n)) = \mathsf{DTIME}(2n)$.

Bemerkung: Die zweite Implikation gilt für alle f, g, für die ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(n), g(n) \geq (1 + \varepsilon)n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $f \in \Theta(g)$ folgt nämlich $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$ und mit obiger Annahme:

$$\mathsf{DTIME}(f) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f)) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(g)) = \mathsf{DTIME}(g).$$

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe betrachten wir die Klassen

$$\mathsf{DCSL} = \mathsf{DSPACE}(n) \qquad \text{und} \qquad \mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n).$$

Zeigen Sie:

1. $\mathsf{NL} \subsetneq \mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{PSPACE}$
2. $\{\mathsf{DCSL}, \mathsf{CSL}\} \cap \{\mathsf{P}, \mathsf{NP}\} = \emptyset$

Lösung

1. Zu zeigen sind folgende Aussagen:

   (a) $\mathsf{NL} \subsetneq \mathsf{DCSL}$ (b) $\mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{CSL}$ (c) $\mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{PSPACE}$

   Wir beweisen diese getrennt voneinander.

   (a) Nach dem Satz von Savitch ist NL in $\mathsf{DSPACE}((\log n)^2)$ enthalten, was wegen $(\log n)^2 \in \mathcal{O}(n)$ wiederum in DCSL enthalten ist. Aus dem Platzhierarchiesatz folgt, dass die zweite Inklusion echt ist.

   (b) Diese Inklusion folgt direkt aus der Tatsache, dass $\mathsf{DSPACE}(f)$ für jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in $\mathsf{NSPACE}(f)$ enthalten ist.

   Hinweis: Ob diese Inklusion echt ist oder nicht, ist das bis heute noch ungelöste *erste LBA-Problem*.

   (c) Nach dem Satz von Savitch ist CSL in $\mathsf{DSPACE}(n^2)$ enthalten, was wegen $(n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$ wiederum in $\mathsf{DSPACE}(n^3)$ enthalten ist. Aus dem Platzhierarchiesatz folgt, dass die zweite Inklusion echt ist. Schließlich gilt $\mathsf{DSPACE}(n^3) \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \mathsf{DSPACE}(n^k)$.

2. Zu zeigen sind folgende Aussagen:

   (a) $\mathsf{DCSL} \neq \mathsf{P}$ (b) $\mathsf{CSL} \neq \mathsf{P}$ (c) $\mathsf{DCSL} \neq \mathsf{NP}$ (d) $\mathsf{CSL} \neq \mathsf{NP}$

   Wir beweisen diese getrennt voneinander.

   (a) <u>Beweisskizze</u>

   Wir zeigen zuerst die Implikation

   $$\mathsf{DSPACE}(n) \subseteq \mathsf{P} \implies \mathsf{DSPACE}(n^2) \subseteq \mathsf{P}$$

   nach folgendem Schema:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{L \in \mathsf{DSPACE}(n^2)} \arrow[d, Rightarrow, "\text{Translationssatz für } \mathsf{DSPACE}"] & & \boxed{L \in \mathsf{DTIME}(n^{2k}) \subseteq \mathsf{P}} \\
\boxed{\mathrm{Pad}_{n^2}(L) \in \mathsf{DSPACE}(n)} \arrow[rr, Rightarrow, "\mathsf{DSPACE}(n) \subseteq \mathsf{P}"] & & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Pad}_{n^2}(L) \in \mathsf{DTIME}(n^k) \\ \text{für ein } k \geq 1\end{array}} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Translationssatz für } \mathsf{DTIME}"']
\end{tikzcd}$$

Danach zeigen wir die Ungleichheit von DCSL und P per Widerspruch.

<u>Beweis der obigen Implikation</u>

Angenommen, es gilt $\mathsf{DSPACE}(n) \subseteq \mathsf{P}$. Sei $L \in \mathsf{DSPACE}(n^2)$ beliebig. Nach dem Translationssatz für DSPACE gilt $\mathrm{Pad}_{n^2}(L) \in \mathsf{DSPACE}(n)$, was nach Annahme in P enthalten ist. Dann ist $\mathrm{Pad}_{n^2}(L) \in \mathsf{DTIME}(n^k)$ für ein $k \geq 1$. O. B. d. A. sei $k \geq 2$ (siehe Bemerkung). Nach dem Translationssatz für DTIME folgt:

$$L \in \mathsf{DTIME}((n^2)^k) = \mathsf{DTIME}(n^{2k}) \subseteq \mathsf{P}.$$

<u>Beweis der Ungleichheit</u>

Angenommen, es gilt $\mathsf{DSPACE}(n) = \mathsf{P}$. Dann folgt nach obiger Implikation

$$\mathsf{DSPACE}(n^2) \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{DSPACE}(n),$$

was im Widerspruch zum Platzhierarchiesatz steht.

(b) <u>Beweisskizze</u>

Wir zeigen zuerst die Implikation

$$\mathsf{NSPACE}(n) \subseteq \mathsf{P} \implies \mathsf{NSPACE}(n^3) \subseteq \mathsf{P}$$

nach folgendem Schema:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{L \in \mathsf{NSPACE}(n^3)} \arrow[d, Rightarrow, "\text{Translationssatz für } \mathsf{NSPACE}"] & & \boxed{L \in \mathsf{DTIME}(n^{3k}) \subseteq \mathsf{P}} \\
\boxed{\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{NSPACE}(n)} \arrow[rr, Rightarrow, "\mathsf{NSPACE}(n) \subseteq \mathsf{P}"] & & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{DTIME}(n^k) \\ \text{für ein } k \geq 1\end{array}} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Translationssatz für } \mathsf{DTIME}"']
\end{tikzcd}$$

Danach zeigen wir die Ungleichheit von DCSL und P per Widerspruch.

<u>Beweis der obigen Implikation</u>

Angenommen, es gilt $\mathsf{NSPACE}(n) \subseteq \mathsf{P}$. Sei $L \in \mathsf{NSPACE}(n^3)$ beliebig. Nach dem Translationssatz für NSPACE gilt $\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{NSPACE}(n)$, was nach Annahme in P enthalten ist. Dann ist $\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{DTIME}(n^k)$ für ein $k \geq 1$. O. B. d. A. sei $k \geq 2$ (siehe Bemerkung). Nach dem Translationssatz für DTIME folgt:

$$L \in \mathsf{DTIME}((n^3)^k) = \mathsf{DTIME}(n^{3k}) \subseteq \mathsf{P}.$$

Beweis der Ungleichheit

Angenommen, es gilt $\mathsf{NSPACE}(n) = \mathsf{P}$. Dann folgt nach obiger Implikation und nach dem Satz von Savitch

$$\mathsf{DSPACE}(n^3) \subseteq \mathsf{NSPACE}(n^3) \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NSPACE}(n) \subseteq \mathsf{DSPACE}(n^2),$$

was im Widerspruch zum Platzhierarchiesatz steht.

(c) Analog zu (a).

(d) Analog zu (b).

Die Beweise für (c) und (d) erhält man, indem man in den Beweisn von (a) und (b) jeweils P durch NP und DTIME durch NTIME ersetzt. Der Rest bleibt unverändert.

Bemerkung: Wegen

$$\mathsf{DTIME}(n) \subseteq \mathsf{DTIME}(n^2) \subseteq \mathsf{DTIME}(n^3) \subseteq \ldots$$

kann bei (a) und (b) o. B. d. A. $k \geq 2$ ohne Weiteres angenommen werden. Grund für diese Annahme ist, dass dann $\mathsf{DTIME}(g) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(g))$ für $g(n) = n^2$ verwendet werden kann, was für $g(n) = n$ nicht erlaubt wäre.