Universität Stuttgart

Ergänzungen zu Theoretische Informatik II
Sommersemester 2019
Carlos Camino

Lösungsblatt 13

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgende Implikation:

$$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{L} \implies \mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{PSPACE}.$$

Lösung

In diesem Beweis verwenden wir eine Konstante c, die in der Aussage nicht vorkommt. Der Grund hierfür ist eher didaktischer Natur. Jede Wahl von $c \geq 2$ liefert einen korrekten Beweis. Die Wahl $c = 1$ liefert ebenfalls einen korrekten Beweis, wenn man $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n))$ statt $\mathsf{DTIME}(n)$ schreibt. In der Ergänzung wurden die Fälle $c = k$ und $c = 1$ diskutiert.

<u>Beweisskizze</u>

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} L \in \mathsf{DTIME}\big(2^{n^k}\big) \\ \text{für ein } k \geq 1 \end{array}} \arrow[d, Rightarrow, "\begin{array}{c}\text{Translationssatz}\\ \text{für } \mathsf{DTIME}\end{array}"] & \boxed{L \in \mathsf{DSPACE}(n^k/c) \subseteq \mathsf{PSPACE}} \\
\boxed{\mathrm{Pad}_{2^{n^k/c}}(L) \in \mathsf{DTIME}(n^c)} \arrow[r, Rightarrow, "\mathsf{P} \subseteq \mathsf{L}"] & \boxed{\mathrm{Pad}_{2^{n^k/c}}(L) \in \mathsf{DSPACE}(\log n)} \arrow[u, Rightarrow, "\begin{array}{c}\text{Translationssatz}\\ \text{für } \mathsf{DSPACE}\end{array}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u>

Angenommen, es gilt $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{L}$. Sei $L \in \mathsf{EXP}$ beliebig, d. h. $L \in \mathsf{DTIME}\big(2^{n^k}\big)$ für ein $k \geq 1$. Dann gilt nach dem Translationssatz für deterministische Zeitklassen $\mathrm{Pad}_{2^{n^k/c}}(L) \in \mathsf{DTIME}(n^c)$. Nach Annahme ist also $\mathrm{Pad}_{2^{n^k/c}}(L) \in \mathsf{DSPACE}(\log n)$, woraus nach dem Translationssatz für deterministische Platzklassen

$$L \in \mathsf{DSPACE}(n^k/c) = \mathsf{DSPACE}(\mathcal{O}(n^k)) = \mathsf{DSPACE}(n^k) \subseteq \mathsf{PSPACE}$$

folgt.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe betrachten wir die Klasse

$$\mathsf{E} = \bigcup_{k \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{kn}).$$

Zeigen Sie:

1. $\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$
2. $\mathsf{CSL} \subseteq \mathsf{E}$
3. $\mathsf{E} \neq \mathsf{PSPACE}$

Hinweise:

- EXP wird auch $\mathsf{EXPTIME}$ genannt.
- $\mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n)$.

Lösung

1. Es gilt:

$$\mathsf{P} \overset{(1)}{\subseteq} \mathsf{DTIME}(2^n) \overset{(2)}{\subsetneq} \mathsf{DTIME}(4^n) \overset{(3)}{\subseteq} \mathsf{E} \overset{(4)}{\subseteq} \mathsf{DTIME}\big(2^{n^2}\big) \overset{(5)}{\subsetneq} \mathsf{DTIME}\big(2^{n^3}\big) \overset{(6)}{\subseteq} \mathsf{EXP}$$

Begründungen:

(1) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $n^k \in \mathcal{O}(2^n)$ und somit $\mathsf{DTIME}(n^k) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^n)$.

(2) Wegen $2^n \in \mathcal{O}(4^n)$ ist $\mathsf{DTIME}(2^n)$ eine Teilmenge von $\mathsf{DTIME}(4^n)$. Aus dem Zeithierarchiesatz folgt, dass die umgekehrte Inklusion nicht gilt. (Bitte alle Voraussetzungen überprüfen!)

(3) Es gilt: $4^n = 2^{kn}$ für $k = 2$.

(4) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $2^{kn} \in \mathcal{O}(2^{n^2})$ und somit $\mathsf{DTIME}(2^{kn}) \subseteq \mathsf{DTIME}\big(2^{n^2}\big)$.

(5) Wegen $2^{n^2} \in \mathcal{O}(2^{n^3})$ ist $\mathsf{DTIME}\big(2^{n^2}\big)$ eine Teilmenge von $\mathsf{DTIME}(2^{n^3})$. Aus dem Zeithierarchiesatz folgt, dass die umgekehrte Inklusion nicht gilt. (Bitte auch hier alle Voraussetzungen überprüfen!

(6) Folgt direkt aus der Definition von EXP.

2. Es gilt:

$$\mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n) \subseteq \mathsf{DTIME}\big(2^{\mathcal{O}(n)}\big) = \bigcup_{f \in \mathcal{O}(n)} \mathsf{DTIME}\big(2^{f(n)}\big) \overset{(*)}{\subseteq} \bigcup_{k \geq 1} \mathsf{DTIME}\big(2^{kn}\big) = \mathsf{E}.$$

Die Inklusion $(*)$ zeigt man leicht, indem man für jedes $f \in \mathcal{O}(n)$ die Existenz eines $k \geq 1$ mit $2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^{kn})$ beweist.

Bemerkung: Für jedes $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt: $\mathsf{DTIME}\big(2^{\mathcal{O}(f(n))}\big) = \bigcup_{k \geq 1} \mathsf{DTIME}\big(2^{kf(n)}\big)$.

3. <u>Beweisskizze</u>

Wir zeigen zuerst die Implikation

$$\mathsf{E} \subseteq \mathsf{PSPACE} \implies \mathsf{DTIME}\big(2^{n^3}\big) \subseteq \mathsf{PSPACE}$$

nach folgendem Schema:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{L \in \mathsf{DTIME}\left(2^{n^3}\right)} \arrow[d, Rightarrow, "\text{Translationssatz für } \mathsf{DTIME}"] & \boxed{L \in \mathsf{DSPACE}(n^{3k}) \subseteq \mathsf{PSPACE}} \\
\boxed{\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{DTIME}(2^n) \subseteq \mathsf{E}} \arrow[r, Rightarrow, "\mathsf{E} \subseteq \mathsf{PSPACE}"] & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{DSPACE}(n^k) \\ \text{für ein } k \geq 1\end{array}} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Translationssatz für } \mathsf{DSPACE}"']
\end{tikzcd}
$$

Danach zeigen wir die Ungleichheit von E und PSPACE per Widerspruch.

<u>Beweis der obigen Implikation</u>

Angenommen, es gilt $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{PSPACE}$. Sei $L \in \mathsf{DTIME}\left(2^{n^3}\right)$ beliebig. Nach dem Translationssatz für DTIME gilt $\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{E}$, was nach Annahme in PSPACE enthalten ist. Dann ist $\mathrm{Pad}_{n^3}(L) \in \mathsf{DTIME}(n^k)$ für ein $k \geq 1$, woraus

$$L \in \mathsf{DTIME}((n^3)^k) = \mathsf{DTIME}(n^{3k}) \subseteq \mathsf{PSPACE}$$

nach dem Translationssatz für DSPACE folgt.

<u>Beweis der Ungleichheit</u>

Angenommen, es gilt $\mathsf{E} = \mathsf{PSPACE}$. Dann folgt aus obiger Implikation

$$\mathsf{DTIME}\left(2^{n^3}\right) \subseteq \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{E} \subseteq \mathsf{DTIME}\left(2^{n^2}\right),$$

was im Widerspruch zum Zeithierarchiesatz steht.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das folgende Problem PSPACE-vollständig bezüglich $\leq_{\log}$ ist:

<u>LinearSpaceMembership</u>
Eingabe: Eine 1-Band-TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \Box, F)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$.
Frage: Wird w von M akzeptiert, ohne dass ein Leersymbol $\Box$ gelesen wird?

Lösung

<u>LinearSpaceMembership $\in \mathsf{PSPACE}$</u>

Das Problem kann von einer universellen TM M' entschieden werden, die M so lange auf w simuliert, bis eine der folgenden Bedingungen zum ersten Mal auftritt:

(1) M besucht einen Endzustand.

(2) M hält ohne einen Endzustand besucht zu haben.

(3) M liest ein Leersymbol.

Dies ist in Platz $n \log n$ möglich, wobei n die Länge der Codierung der Probleminstanz (M, w) ist. M' kann so konstruiert werden, dass sie im ersten Fall akzeptiert und in den anderen zwei Fällen nur hält (ohne zu akzeptieren).

<u>LinearSpaceMembership ist PSPACE-hart</u> (bezüglich $\leq_{\log}$)

Der folgende Beweis ist ein Beispiel einer einfachen Master-Reduktion.

Sei $L \in \mathsf{PSPACE}$ beliebig. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und eine DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \square, F)$ mit $T(M) = L$, die auf jede Eingabe der Länge n höchstens n^k Felder auf dem Band verwendet. O. B. d. A. können wir annehmen, dass M eine 1-Band-TM ist und dass der Leseschreibkopf von M nie die Felder links von der Startposition besucht. Für eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ definiere $f(w)$ als die Codierung einer Probleminstanz (M', w') mit $w' = w\square^{|w|^k - |w|}$ und

$$M' = (Q, \Sigma \cup \{\square\}, \Gamma \cup \{\blacksquare\}, \delta', s, \blacksquare, F),$$

wobei $\blacksquare \notin \Gamma$ ein beliebiges Symbol ist und δ' die Funktion δ beliebig auf $Q \times (\Gamma \cup \{\blacksquare\})$ fortsetzt. (Da die Überführungsfunktion einer DTM auch partiell sein darf, kann beispielsweise $\delta' = \delta$ gewählt werden.)

f ist total, da man die Codierung von Probleminstanzen so definieren kann, dass jedes Eingabewort eine gültige Probleminstanz darstellt.

f ist in logarithmischem Platz berechenbar, da man für die Ausgabe von w' einen Zähler verwenden kann, der die Anzahl der ausgegebenen $\square$-Zeichen zählt. Bei Binärdarstellung ist dieser in Platz

$$\log(n^k) = k \log n \in \mathcal{O}(\log n)$$

realisierbar. Die Konstruktion von M' benötigt konstanten Platz, da M fest ist.

Schließlich gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
w \in L &\iff M \text{ akzeptiert } w \text{ in Platz } |w|^k \\
&\iff M' \text{ akzeptiert } w' \text{ in Platz } |w'| \\
&\iff M' \text{ akzeptiert } w' \text{ ohne ein Leersymbol } \blacksquare \text{ zu lesen} \\
&\iff f(w) \in \textsc{LinearSpaceMembership}.
\end{aligned}$$