Ergänzung zu Theoretische Informatik II

Prädikatenlogik

Carlos Camino

www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/s19/eti2

Sommersemester 2019

Strukturen

Eine Struktur $\mathcal{A}$ (*schön-A* oder *kalligrafisches A*) ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ bestehend aus einer Menge U und einer Funktion I.

U heißt Universum oder Grundmenge und seine Elemente Individuen. I heißt Interpretation und bildet

- Prädikatsymbole auf Relationen über U,
- Funktionssymbole auf Funktionen über U und
- Variablen auf Individuen

ab. Konkret soll für alle $i, k \in \mathbb{N}$ mit $i \neq 0$ gelten:

- $I(P_i^k) \subseteq U^k$,
- $I(f_i^k)\colon U^k \to U$ und
- $I(x_i) \in U$.

Strukturen

Eine Struktur $\mathcal{A} = (U, I)$ passt zu einer prädikatenlogischen Formel F, wenn I für

- jedes in F vorkommende Prädikatsymbol,
- jedes in F vorkommende Funktionssymbol
- und jede in F vorkommende freie Variable

definiert ist.

Dann kann der Wahrheitswert von F unter $\mathcal{A}$ wie in der Vorlesung definiert werden.

Beispiel: la bagarre générale

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur mit einer Menge

$$U = \{\text{Asterix}, \text{Obelix}, \text{Majestix}, \text{Miraculix}, \text{Troubadix}, \ldots\}$$

von Bewohnern eines bekannten Dorfes in Gallien und die in diesem Dorf natürlichste Interpretation eines binären Prädikats P:

$$I(P) = \left\{(x, y) \in U^2 \,\middle|\, x \text{ schlägt } y\right\}.$$

Beispiel: la bagarre générale

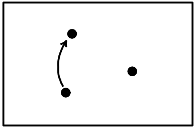
Betrachten wir folgende Formeln:

Formel	Bedeutung
$\exists x \exists y P(x, y)$	Jemand schlägt jemanden.
$\exists y \exists x P(x, y)$	Jemand wird von jemandem geschlagen.
$\exists x \forall y P(x, y)$	Jemand schlägt jeden.
$\forall y \exists x P(x, y)$	Jeder wird von jemandem geschlagen.
$\forall x \exists y P(x, y)$	Jeder schlägt jemanden.
$\exists y \forall x P(x, y)$	Jemand wird von jedem geschlagen.
$\forall x \forall y P(x, y)$	Jeder schlägt jeden.
$\forall y \forall x P(x, y)$	Jeder wird von jedem geschlagen.

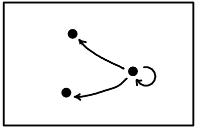
Was bedeuten sie für die Dorfbewohner?

Beispiel: la bagarre générale

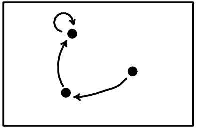
Mögliche Modelle für den Fall $|U| = 3$:



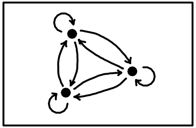
$\exists x \exists y P(x, y)$



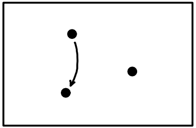
$\exists x \forall y P(x, y)$



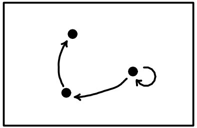
$\forall x \exists y P(x, y)$



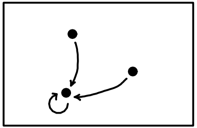
$\forall x \forall y P(x, y)$



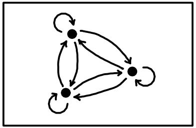
$\exists y \exists x P(x, y)$



$\forall y \exists x P(x, y)$



$\exists y \forall x P(x, y)$



$\forall y \forall x P(x, y)$

Infos

- Dass x und y unterschiedliche Variablennamen haben, heißt nicht, dass sie immer auf unterschiedliche Individuen zeigen. Wenn im Beispiel jeder jeden schlägt, dann muss sich auch jeder selber schlagen.
- Die Übersetzung von Prädikatenlogik ins Deutsche ist sehr schwierig! Vielleicht habe ich im Beispiel einiges falsch formuliert.
- Unter

  `http://de.wikipedia.org/wiki/Quantor`

  findet man viele hilfreiche Beispiele, um Quantoren besser zu verstehen.

Quiz

Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall y \exists x P(x, y).$$

Frage:

Wie soll die Interpretation $I(P)$ von P definiert werden, damit $\mathcal{A} = (U, I)$ ein Modell für F mit Universum $U = \{1, 2\}$ ist?

Quiz

Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall y \exists x P(x, y).$$

Frage:

Wie soll die Interpretation $I(P)$ von P definiert werden, damit $\mathcal{A} = (U, I)$ ein Modell für F mit Universum $U = \{1, 2\}$ ist?

Antwort:

Die einzigen Möglichkeiten sind $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ und $I(P) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.