Ergänzung zu Theoretische Informatik II

Primitiv rekursive Funktionen

Carlos Camino

www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/s19/eti2

Sommersemester 2019

Definition

Die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen, die folgende Bedingungen erfüllt.

(1) Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ ist die *j-stellige konstante i-Funktion* $c_i^j \colon \mathbb{N}^j \to \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_j) \mapsto i$ primitiv rekursiv.

(2) Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq j$ ist die *j-stellige Projektion auf die i-te Komponente* $\pi_i^j \colon \mathbb{N}^j \to \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_j) \mapsto x_i$ primitiv rekursiv.

(3) Die *Nachfolgerfunktion* $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x + 1$ ist primitiv rekursiv.

(4) Sind $k, \ell \in \mathbb{N}$ beliebig und $g \colon \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ und $h_1, \dots, h_\ell \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, dann auch ihre *Komposition* $g(h_1, \dots, h_\ell) \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto g(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_\ell(x_1, \dots, x_k))$.

(5) Ist $k \in \mathbb{N}$ beliebig und sind $g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h \colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, dann auch ihre *primitive Rekursion* $\mathrm{rec}(g, h) \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{rec}(g, h)(0, x_1, \dots, x_k) &= g(x_1, \dots, x_k), \\
\mathrm{rec}(g, h)(n + 1, x_1, \dots, x_k) &= h(\mathrm{rec}(g, h)(n, x_1, \dots, x_k), n, x_1, \dots, x_k).
\end{aligned}$$

Beispiele

1. Für die Addition $\mathrm{add}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x + y$ gilt:

$$\boxed{\mathrm{add} = \mathrm{rec}(\pi_1^1, s(\pi_1^3)).}$$

2. Für die Multiplikation $\mathrm{mult}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ gilt:

$$\boxed{\mathrm{mult} = \mathrm{rec}(c_0^1, \mathrm{add}(\pi_1^3, \pi_3^3)).}$$

3. Für die Dekrement-Funktion $\mathrm{dec}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x \dot{-} 1$ gilt:

$$\boxed{\mathrm{dec} = \mathrm{rec}(c_0^0, \pi_2^2).}$$

4. Für die modifizierte Subtraktion $\mathrm{sub}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ gilt:

$$\boxed{\mathrm{sub} = \mathrm{rec}(\pi_1^1, \mathrm{dec}(\pi_1^3))(\pi_2^2, \pi_1^2).}$$

Erinnerung: Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt $x \dot{-} y = \max\{x - y, 0\}$.

Info

Die Ausdrücke $g(h_1, \dots, h_\ell)$ und $\mathrm{rec}(g, h)$ stellen selbst Funktionen dar. Für diese gilt

$$g(h_1, \dots, h_\ell)(x_1, \dots, x_k) = g(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_\ell(x_1, \dots, x_k))$$

und

$$\mathrm{rec}(g, h)(n, x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} g(x_1, \dots, x_k) & \text{für } n = 0 \\ h(\mathrm{rec}(g, h)(n-1, x_1, \dots, x_k), n-1, x_1, \dots, x_k) & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

Wichtig!

Es ist von enormem Vorteil die Definition und die Beispiele bis ins letzte Detail zu verstehen. Dabei sollte man nicht nur auf die berechnete Funktion (Semantik), sondern auch auf die präzise Notation (Syntax) der Ausdrücke achten.

Weil ich meiner Tutorübung danach gefragt wurde, gibt es hier noch ein paar Tipps, mit denen sich hoffentlich Fehler vermeiden lassen.

Zusätzlich habe ich die Musterlösung von Aufgabe 1 auf Ergänzungsblatt 1 um Nebenrechnungen erweitert. Solche Nebenrechnungen können verwendet werden, um zu überprüfen, ob ein gegebener (bzw. gefundener) Ausdruck syntaktisch und semantisch korrekt ist.

Tipp 1: Korrekte Typisierung

Sei $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine Funktion, für die ein definierender, primitiv rekursiver Ausdruck gefunden werden soll. Hat der Ausdruck die Form $f = g(h_1, \ldots, h_\ell)$, dann sollte

$$f, h_1, \ldots, h_\ell\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$$

gelten. Hat der Ausdruck dagegen die Form $f = \mathrm{rec}(g, h)$, dann sollte neben $k \geq 1$ auch

$$g\colon \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad h\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$$

gelten.

Tipp 2: Keine Variablen, nur Funktionen

In einem definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck dürfen keine Variablen vorkommen. Beispielsweise meinte man mit

$$\text{add} = \text{rec}(y, s(\pi_1^3))$$

zwar das Richtige, nämlich $\text{add}(0, y) = y$ und $\text{add}(n + 1, y) = s(\text{add}(n, y))$, aber der Ausdruck ist falsch, da y keine Funktion ist.

Tipp 3: „f ist primitiv rekursiv, weil f primitiv rekursiv ist“

Möchte man zeigen, dass eine Funktion f primitiv rekursiv ist, so kann der jeweilige definierende Audruck nur aus Funktionen bestehen, von denen man bereits weiß, dass sie primitiv rekursiv sind. Insbesondere darf f nicht im Ausdruck vorkommen.

Beispielsweise ist der Ausdruck

$$\mathrm{add} = \mathrm{rec}(\pi_1^1, s(\mathrm{add}(\pi_2^3, \pi_3^3)))$$

zwar syntaktisch und semantisch korrekt, aber aus ihm folgt nicht, dass add primitiv rekursiv ist. Dazu müsste zuerst bewiesen werden, dass add primitiv rekursiv ist. Die Katze beißt sich in den Schwanz!

Aus demselben Grund kann mittels

$$F = \mathrm{rec}(c_0^0, \mathrm{add}(\pi_1^2, F(\mathrm{dec}(\pi_2^2))))$$

nicht gezeigt werden, dass die Fibonacci-Folge $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.