Aufgabensammlung

Dieses Dokument enthält (1) alle relevanten Ergänzungsaufgaben der letzten zwei Jahre, (2) Aufgaben der letzten drei Prüfungen und (3) einige frisch ausgedachten Aufgaben.

Die Aufgaben sind nach Themem sortiert und wurden mit Musterlösungen versehen. Bei den Lösungen zu den Aufgaben aus (1) wird auf die entsprechenden Ergänzungen verwiesen, damit man sich bei Bedarf Aufzeichnungen dazu anschauen kann. Diese werden bis zur Prüfung online bleiben.

Alte Prüfungen sind unter

`www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/exams`

zu finden.

Mehr Aufgaben stehen auf den Vorlesungswebseiten der letzten Jahre zur Verfügung. Die Hausaufgaben vom Sommersemester 2018 wurden in den Ergänzungen 4, 6, 8, 10, 12, 14 und 15 (ebenfalls vom Sommersemester 2018) diskutiert.

Diese Datei wird, wie alle anderen auf der Ergänzungswebseite, laufend verbessert. Es werden jedoch keine Aufgaben hinzugefügt oder gestrichen, sodass die Nummerierung unverändert bleiben wird.

Viel Erfolg bei der Prüfungsvorbereitung!

Fehlermeldungen bitte an `camino@fmi.uni-stuttgart.de`. Vielen Dank!

Inhaltsverzeichnis

Turingmaschinen

(Auffrischung aus Theoretische Informatik I)

Aufgabe 1

Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine natürliche Zahl, $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein m-elementiges Alphabet und L folgende Sprache über Σ:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt jeder Buchstabe aus } \Sigma \text{ vor}\} .$$

Geben Sie eine DTM M für L an.

1. M darf den Leseschreibkopf nicht nach links bewegen.
2. M darf höchstens $2m$ Zustände haben.
3. M darf höchstens $m + 2$ Zustände und höchstens $m + 2$ Bandsymbole haben.

Aufgabe 2

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L eine DTM an.

1. $L = \left\{a^k \mid k \text{ ist eine Zweierpotenz}\right\}$
2. $L = \left\{a^k \mid k \text{ ist eine Quadratzahl}\right\}$

Aufgabe 3

Seien $a_1, \dots, a_n$ beliebige Buchstaben aus einem Alphabet Σ. Geben Sie in Abhängigkeit der a_i eine DTM M an, die nur das Wort $w = a_1 \dots a_n$ akzeptiert, d. h. : $T(M) = \{w\}$.

Aussagen- und Prädikatenlogik

(Vorlesungseinheiten 1-4)

Aufgabe 4

Eine aussagenlogische Formel ist in *kanonischer DNF* (bzw. *kanonischer KNF*), wenn sie in DNF (bzw. KNF) ist und jede Klausel jede Variable aus der Formel genau einmal enthält.

Sei $F = ((A \to B) \leftrightarrow (\neg B \vee A)) \wedge C$.

1. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel in kanonischer DNF an.
2. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel in kanonischer KNF an.

Aufgabe 5

Gegeben seien folgende prädikatenlogische Formeln:

$$\begin{array}{lll} F_1 = \forall x \exists y P(x,y), & F_4 = \forall x \neg P(x, f(x)), & F_7 = \forall x (\exists y P(y,x) \to Q(x)), \\ F_2 = \forall x \neg P(x,x), & F_5 = \forall x \forall y (P(y, f(x)) \to P(x,y)), & F_8 = \neg Q(f(f(x))) \\ F_3 = \exists y \forall x \neg P(x,y), & F_6 = P(a, f(f(a))), & F_9 = P(f(y), y). \end{array}$$

Geben Sie ein Modell mit möglichst kleinem Universum für $F = \bigwedge_{i=1}^{9} F_i$ an.

Aufgabe 6

Entscheiden Sie für jede der folgenden Formeln, ob diese erfüllbar ist oder nicht. Geben Sie ein Modell mit möglichst kleinem Universum an oder begründen Sie, warum sie kein Modell besitzt.

1. $F = P(a,b) \wedge$
$\forall x \Big(\forall y \forall z \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z) \big) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \forall y \big(P(x,y) \to \neg P(y,x) \big) \Big)$
2. $F = \forall x \Big(\big(P(x) \to \forall y Q(x,y) \big) \wedge \neg Q(x,x) \Big) \wedge \exists x P(x)$
3. $F = P\big(f(a), a\big) \wedge \forall x \Big(\neg P(x,x) \wedge P\big(f(x), x\big) \wedge \forall y \forall z \big((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z) \big) \Big)$

Turing-, LOOP-, GOTO- und WHILE-Berechenbarkeit

(Vorlesungseinheiten 5-9)

Aufgabe 7

Welche der folgenden Gleichungen gelten für beliebige $x, y, z \in \mathbb{N}$? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $x \dot{-} (y \dot{-} z) = x \dot{-} y + z$
2. $(x \dot{-} y) \dot{-} z = x \dot{-} (y + z)$
3. $x + y \dot{-} z = x + (y \dot{-} z)$
4. $x(y \dot{-} z) = xy \dot{-} xz$
5. $(x \dot{-} y)^2 = x^2 \dot{-} 2xy + y^2$
6. $(x + y)(x \dot{-} y) = x^2 \dot{-} y^2$

Aufgabe 8

Was muss für $x, y, z \in \mathbb{N}$ gelten, damit die Gleichung

$$x + y \dot{-} z = x + (y \dot{-} z)$$

erfüllt ist?

Aufgabe 9

Geben Sie eine DTM M an, die die Nachfolgerfunktion

$$s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$$

berechnet.

Aufgabe 10

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

1. Wenn f und g Turing-berechenbar sind, dann ist es auch $f + g$.
2. Wenn f Turing-berechenbar ist und g nicht, dann ist $f + g$ nicht Turing-berechenbar.
3. Wenn f und g nicht Turing-berechenbar sind, dann ist es auch $f + g$ nicht.

Hinweis: $f + g$ ist ebenfalls eine Funktion mit $f + g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n) + g(n)$.

Aufgabe 11

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

1. Wenn f und g Turing-berechenbar sind, dann ist auch $f \circ g$ Turing-berechenbar.
2. Wenn f und $f \circ g$ Turing-berechenbar sind, dann ist auch g Turing-berechenbar.
3. Wenn g und $f \circ g$ Turing-berechenbar sind, dann ist auch f Turing-berechenbar.

Hierbei bezeichne $\circ$ die Komposition von Funktionen.

Aufgabe 12

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen ein LOOP-Programm an, das die jeweilige Funktion berechnet.

1. $\max\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto \begin{cases} n, & \text{falls } m \leq n \\ m & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\text{square}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$
3. $\text{twopow}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2^n$

Aufgabe 13

Zeigen Sie, dass folgende Anweisungen durch ein LOOP-Programm P simuliert werden können.

1. $x_i := x_j * x_k$
2. `IF` $x_i = 0$ `THEN` P `END`

Dabei sind x_i, x_j und x_k beliebige Variablen und P ein beliebiges LOOP-Programm.

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen LOOP-berechenbar sind.

1. $\text{sqrt}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
2. $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |\{m \leq n \,|\, m \text{ teilt } n\}|$

Hinweis: Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: m teilt n, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = km$.

Aufgabe 15

Wir erweitern LOOP-Programme um Anweisungen `HALT` und `ERROR`, die die Ausführung des Programms sofort abbrechen. Bei `HALT` ist der Rückgabewert der aktuelle Wert der Variable x_0. Bei `ERROR` ist das Resultat der Berechnung undefiniert.

1. Gibt es für jedes LOOP-Programm mit `HALT`-Anweisungen ein äquivalentes LOOP-Programm ohne `HALT`-Anweisungen?
2. Gibt es für jedes LOOP-Programm mit `ERROR`-Anweisungen ein äquivalentes LOOP-Programm ohne `ERROR`-Anweisungen?

Aufgabe 16

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = f(n) \bmod 2$? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn f Turing-berechenbar ist, dann ist es g auch.
2. Wenn f nicht Turing-berechenbar ist, dann ist es g auch nicht.
3. g ist Turing-berechenbar, egal ob f es ist oder nicht.

Aufgabe 17

Wir betrachten die ganzzahlige Division

$$\mathrm{div}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (m,n) \mapsto \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor,$$

wobei $\mathrm{div}(m,n)$ genau dann für $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ definiert ist, wenn $n \neq 0$ gilt.

1. Geben Sie ein WHILE-Programm P an, das div berechnet.
2. Geben Sie ein GOTO-Programm P an, das div berechnet.
3. Ist div
   (a) Turing-berechenbar?
   (b) LOOP-berechenbar?
4. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, die nicht Turing-berechenbar ist. Für welche $c \in \mathbb{N}$ ist $cf\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto cn$ Turing-berechenbar?

Aufgabe 18

Wir erweitern GOTO-Programme um variable Sprünge. Beim Erreichen einer Anweisung der Form `GOTO` x_i, wobei x_i eine Programmvariable ist, soll zur Marke M_{x_i} gesprungen werden. Falls die adressierte Marke nicht existiert, ist das Resultat der Berechnung nicht definiert.

Gibt es für jedes GOTO-Programm mit variablen Sprüngen ein äquivalentes GOTO-Programm ohne variable Sprünge?

Primitive Rekursion

(Vorlesungseinheiten 10-11)

Aufgabe 19

Gegeben sei die Funktion

$$p = \mathrm{rec}(c_1^1, \mathrm{mult}(\pi_1^3, \pi_3^3))(\pi_2^2, \pi_1^2).$$

Geben Sie eine möglichst einfache Zuordnungsvorschfrift für p an.

Aufgabe 20

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind, indem Sie für jede Funktion einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

1. $\mathrm{zero}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\mathrm{leq}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
3. $\mathrm{eq}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
4. $\mathrm{ifzero}\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ (x,y,z) \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } x = 0 \\ z & \text{sonst} \end{cases}$
5. $\mathrm{max}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } x \leq y \\ x & \text{sonst} \end{cases}$
6. $\Delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \sum_{i=0}^{x} i$

Aufgabe 21

Sei $P\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion mit Wertebereich $\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass der (dreistellige) *beschränkte Existenzoperator* $\exists_P^3\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\exists_P^3(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists \ell \leq x\colon P(\ell,y,z) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

Hinweis: $\exists_P^3$ ist eine Verallgemeinerungen des beschränkten Existenzoperators Q aus Vorlesungsfolie 10.6.

Aufgabe 22

Sei $P\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion mit Wertebereich $\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass der (zweistellige) *beschränkte Maximumoperator* $\max_P^2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\max\nolimits_P^2(x,y) = \begin{cases} \max\{k \leq x \mid P(k,y) = 1\}, & \text{falls ein } k \leq x \text{ existiert mit } P(k,y) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist, indem Sie für einen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

Hinweis: $\max_P^2$ ist eine Verallgemeinerung des beschränkten Maximumoperators q aus Vorlesungsfolie 10.6.

Aufgabe 23

Seien $k \geq 1$ eine Konstante und $P\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion mit Wertebereich $\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind.

Hinweis: Sie müssen keinen definierenden, primitiv rekursiven Ausdruck angeben.

1. Der k-stellige *beschränkte Existenzoperator* $\exists_P^k\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$\exists_P^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists x \leq n_1\colon P(x, n_2, \ldots, n_k) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Der k-stellige *beschränkte Alloperator* $\forall_P^k\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$\forall_P^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \forall x \leq n_1\colon P(x, n_2, \ldots, n_k) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Der k-stellige *beschränkte Minimumoperator* $\min_P^k\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$\min\nolimits_P^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \min\left\{x \leq n_1 \,|\, P(x, n_2, \ldots, n_k) = 1\right\},$$

   falls ein $x \leq n_1$ existiert mit $P(x, n_2, \ldots, n_k) = 1$ und $\min_P^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = n_1 + 1$ sonst.

4. Der k-stellige *beschränkte Maximumoperator* $\max_P^k\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$\max\nolimits_P^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \max\left\{x \leq n_1 \,|\, P(x, n_2, \ldots, n_k) = 1\right\},$$

   falls ein $x \leq n_1$ existiert mit $P(x, n_2, \ldots, n_k) = 1$ und $\max_P^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 0$ sonst.

Aufgabe 24

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind.

1. $\text{divides}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ von } m \text{ geteilt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\text{prime}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ prim ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
3. $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |\{m \leq n \,|\, m \text{ teilt } n\}|$
4. $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |\{p \leq n \,|\, p \text{ prim}\}|$

Hinweis: d heißt *Teileranzahlfunktion* und π *Primzahlfunktion*.

Aufgabe 25

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Funktionen $a, b, f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{x} a(i) \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sum_{i=0}^{b(x)} a(i)$$

richtig? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn a primitiv rekursiv ist, dann ist auch f primitiv rekursiv.
2. Wenn f primitiv rekursiv ist, dann ist auch a primitiv rekursiv.
3. Wenn a und b primitiv rekursiv sind, dann ist auch g primitiv rekursiv.
4. Wenn g primitiv rekursiv ist, dann sind auch a und b primitiv rekursiv.

Aufgabe 26

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn f und g primitiv rekursiv sind, dann ist auch $f \circ g$ primitiv rekursiv.
2. Wenn f und $f \circ g$ primitiv rekursiv sind, dann ist auch g primitiv rekursiv.
3. Wenn g und $f \circ g$ primitiv rekursiv sind, dann ist auch f primitiv rekursiv.

Hierbei bezeichne $\circ$ die Komposition von Funktionen.

Aufgabe 27

Sei $c\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die *Cantorsche Paarungsfunktion* aus Vorlesungseinheit 10. Zeigen Sie, dass c bijektiv ist und dass sowohl c als auch die Funktionen $e, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $e(n) = \pi_1^2(c^{-1}(n))$ und $f(n) = \pi_2^2(c^{-1}(n))$ primitiv rekursiv sind.

Hinweis: Beim Beweis der Injektivität von c ist folgende Monotonieeigenschaft hilfreich:

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{N}\colon x + y > x' + y' \implies c(x, y) > c(x', y').$$

Partielle Rekursion

(Vorlesungseinheit 12)

Aufgabe 28

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ (w, x, y) \mapsto \left\lfloor \frac{x \dot{-} w}{y \dot{-} w} \right\rfloor.$$

Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung von μf an.

Aufgabe 29

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ (x,y,z) \mapsto \left\lceil \log_2(y \mathbin{\dot-} xz) \right\rceil,$$

die genau dann für $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ definiert ist, wenn $xz < y$ gilt. Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung von μf an.

Aufgabe 30

Geben Sie für jede der folgenden totalen Funktionen f eine möglichst einfache Beschreibung von μf an.

1. $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (w,x) \mapsto x \mathbin{\dot-} 2w$
2. $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}, (w,x,y) \mapsto (x \mathbin{\dot-} w) + (y \mathbin{\dot-} w)$
3. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, w \mapsto w^2 - 6w + 9$
4. $f\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}, (w,x,y,z) \mapsto (x^2 \mathbin{\dot-} w) + (z \mathbin{\dot-} y) + (y \mathbin{\dot-} 2z)$
5. $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (w,x) \mapsto 5x \mathbin{\dot-} w$
6. $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}, (w,x,y) \mapsto x + (y \mathbin{\dot-} w)$
7. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, w \mapsto \sum_{k=0}^{w} k(k+1)$
8. $f\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}, (w,x,y,z) \mapsto (y+z) \mathbin{\dot-} (w+x)$

Aufgabe 31

Zeigen Sie, dass jede der folgenden Funktionen μ-rekursiv ist, indem Sie eine μ-rekursive Funktion f angeben, sodass μf die gegebene Funktion ist.

Welche der Funktionen sind zudem primitiv rekursiv?

1. $\mathrm{div}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$
2. $\mathrm{mod}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto x \bmod y$
3. $\mathrm{sqrt}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

Die Ackermannfunktion

(Vorlesungseinheit 13)

Aufgabe 32

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antworten kurz.

1. Gibt es eine primitiv rekursive Funktion, die nicht Turing-berechenbar ist?
2. Ist die Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (m,n) \mapsto \log_n(m)$ primitiv rekursiv?
3. Ist jede totale Turing-berechenbare Funktion primitiv rekursiv?
4. Sei a die Ackermann-Funktion. Ist $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 1 \dot{-} a(n,n)$ primitiv rekursiv?
5. Ist die nirgends definierte Funktion $\Omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μ-rekursiv?

Entscheidbarkeit

(Vorlesungseinheit 14)

Aufgabe 33

Zeigen Sie, dass die Klasse der entscheidbaren Sprachen unter folgenden Operationen abgeschlossen ist:

1. Komplement
2. Schnitt
3. Vereinigung
4. Differenz
5. Konkatenation
6. Kleene-Stern

Aufgabe 34

Welche der folgenden Aussagen sind für eine beliebige Sprache A richtig? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn A entscheidbar ist, dann ist auch $\overline{A}$ entscheidbar.
2. Wenn A entscheidbar ist, dann ist auch A^* entscheidbar.
3. Wenn A^* entscheidbar ist, dann ist auch A entscheidbar.
4. Wenn A kontextsensitiv (d. h. vom Typ 1) ist, dann ist A entscheidbar.

Aufgabe 35

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Sprachen A und B richtig? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn A und B entscheidbar sind, ist auch AB entscheidbar.
2. Wenn A und AB entscheidbar sind, ist auch B entscheidbar.
3. Wenn A und B entscheidbar sind, ist auch $A \cap B$ entscheidbar.
4. Wenn A und B unentscheidbar sind, ist auch $A \cap B$ unentscheidbar.
5. Wenn A und $A \cap B$ entscheidbar sind, ist auch B entscheidbar.
6. Wenn A und B entscheidbar sind, ist auch $A \cup B$ entscheidbar.
7. Wenn A und B unentscheidbar sind, ist auch $A \cup B$ unentscheidbar.
8. Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, ist auch B entscheidbar.
9. Wenn $A \cap B$ und $A \cup B$ entscheidbar sind, sind A und B entscheidbar.
10. Wenn $A \subseteq B$ und B entscheidbar ist, ist auch A entscheidbar.

Aufgabe 36

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Sprachen L, dass diese für beliebige rekursiv aufzählbaren Sprachen $A, B, A_0, A_1, A_2, \ldots$ über Σ selbst rekursiv aufzählbar sind.

1. $L = A \cup B$
2. $L = AB$
3. $L = A \cap B$
4. $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$
5. $L = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$
6. $L = A^*$

Reduktionen und der Satz von Rice

(Vorlesungseinheiten 15-16)

Aufgabe 37

Sei L die Menge aller Gödelisierungen von Turingmaschinen, die eine Funktion mit unendlicher Bildmenge berechnen, d. h. :

$$L = \{w \mid \text{die Bildmenge der von } M_w \text{ berechneten Funktion ist unendlich}\}.$$

Zeigen Sie, dass L unentscheidbar ist, indem Sie

1. den Satz von Rice anwenden.
2. $H_0 \leq L$ zeigen.

Aufgabe 38

Sei L die Menge aller Gödelisierungen von Turingmaschinen, die eine totale und streng monoton steigende Funktion berechnen, d. h. :

$$L = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion ist total und streng monoton steigend}\}.$$

Zeigen Sie, dass L unentscheidbar ist, indem Sie

1. $H_0 \leq L$ zeigen.
2. den Satz von Rice anwenden.

Aufgabe 39

Gegeben seien die Sprachen

$$A = \{u\#v \mid T(M_u) \subseteq T(M_v)\} \quad \text{und} \quad B = \{u\#v \mid T(M_u) = T(M_v)\}.$$

1. Zeigen Sie: $H_0 \leq A$.
2. Zeigen Sie: $A \leq B$.
3. Zeigen Sie: $\overline{H_0} \leq B$.
4. Zeigen Sie: $B \leq A$.
5. Was folgt daraus für die semi- und die co-semi-Entscheidbarkeit von A bzw. B?

Hinweis: Wegen

$$A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$$

gilt für beliebige Sprachen A und B: Falls $A \leq B$ und B co-semi-entscheidbar ist, dann ist auch A co-semi-entscheidbar.

Aufgabe 40

Wir betrachten folgende Entscheidungsprobleme für Turingmaschinen:

(a) Das Leerheitsproblem $\textsc{Emp}$
Eingabe: Eine Turingmaschine M
Frage: Ist die von M akzeptierte Sprache leer?

(b) Das Endlichkeitsproblem $\textsc{Fin}$
Eingabe: Eine Turingmaschine M
Frage: Ist die von M akzeptierte Sprache endlich?

(c) Das Regularitätsproblem $\textsc{Reg}$
Eingabe: Eine Turingmaschine M
Frage: Ist die von M akzeptierte Sprache regulär?

Zeigen Sie:

1. $\textsc{Emp}$ ist unentscheidbar.
2. $\textsc{Emp} \leq \textsc{Fin}$.
3. $\textsc{Fin} \leq \textsc{Reg}$.

Aufgabe 41

Seien Σ ein Alphabet und $u, v \in \Sigma^*$ Wörter über Σ. Wir betrachten die Menge $L_{u,v}$ aller Gödelindizes von Turingmaschinen, die u akzeptieren, aber v nicht, d. h. :

$$L_{u,v} = \{w \mid u \in T(M_w) \wedge v \notin T(M_w)\}.$$

1. Zeigen Sie: Wenn $u \neq v$, dann $H_0 \leq L_{u,v}$.
2. Zeigen Sie: Wenn $u \neq v$, dann $\overline{H_0} \leq L_{u,v}$.
3. Für welche u, v ist $L_{u,v}$ semi- bzw. co-semi-entscheidbar?

Aufgabe 42

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Alphabete Σ, Γ und Δ und beliebige Sprachen A über Σ, B über Γ und C über Δ richtig? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn $A \leq B$, dann $\overline{B} \leq \overline{A}$ gilt.
2. Wenn $A \leq B$, dann $\overline{A} \leq \overline{B}$ gilt.
3. Wenn B regulär und $A \leq B$, dann ist A regulär.
4. Wenn B co-semi-entscheidbar und $A \leq B$, dann ist A co-semi-entscheidbar.
5. Wenn B unentscheidbar, dann gilt $A \leq B$ für alle Sprachen A.
6. $A \leq A$
7. $A \leq \overline{A}$
8. Wenn $A \leq B$, dann $A \subseteq B$.
9. Wenn $A \subseteq B$, dann $A \leq B$.
10. Wenn $A \leq B$ und $B \leq C$, dann $A \leq C$.

Aufgabe 43

Welche der folgenden Sprachen sind semi-entscheidbar und welche co-semi-entscheidbar? Beweisen Sie Ihre Antworten.

Hinweis: Für $w \in \{0,1\}^*$ sei φ_w die von M_w berechnete Funktion.

1. $L = \{w \mid M_w \text{ akzeptiert mindestens ein Wort } x \text{ mit } |x| \leq 100\}$
2. $L = \{w \mid M_w \text{ berechnet } \chi_K\}$
3. $L = \{w \mid M_w \text{ hält auf keine Eingabe in höchstens 100 Schritten}\}$
4. $L = \{w \mid \varphi_w \text{ ist an der Stelle 0 nicht definiert}\}$
5. $L = \left\{w \mid \varphi_w \text{ reduziert } \overline{H_0} \text{ auf } K\right\}$
6. $L = \{w \mid \varphi_w(0) = 0\}$
7. $L = \{w \mid \varphi_w(w) = 0\}$

8. $L = \{w \mid \varphi_0(0) = w\}$
9. $L = \{w \mid T(M_w) \text{ ist semi-entscheidbar}\}$
10. $L = \{w \mid |T(M_w)| \leq 100\}$

Aufgabe 44

Welche der folgenden Probleme sind semi- und welche co-semi-entscheidbar?

1. Problem A
   Eingabe: Eine DTM M
   Frage: Berechnet M die Ackermannfunktion a?
2. Problem B
   Eingabe: Eine DTM M
   Frage: Besitzt M mindestens 5 Zustände?
3. Problem C
   Eingabe: Eine DTM M.
   Frage: Besucht M, wenn auf ε gestartet, alle Zustände?

Aufgabe 45

Sei M eine DTM mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon |\{w \in T(M) \mid |w| = n\}| = 1.$$

Zeigen Sie, dass $T(M)$ entscheidbar ist.

Aufgabe 46

Seien Σ ein Alphabet und L eine Sprache über Σ. Zeigen Sie, dass L genau dann semi-entscheidbar ist, wenn sich L auf das allgemeine Halteproblem

$$H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$$

reduzieren lässt.

Aufgabe 47

Geben Sie jeweils eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften an oder begründen Sie kurz warum keine solche Funktion existieren kann.

1. Eine berechenbare Funktion, die nicht total ist.
2. Eine totale Funktion, die nicht berechenbar ist.
3. Eine Funktion, die weder berechenbar noch total ist.
4. Eine primitiv rekursive Funktion mit endlichem Definitionsbereich.
5. Eine primitiv rekursive Funktion mit endlichem Wertebereich.

6. Eine primitiv rekursive Funktion mit unentscheidbarem Definitionsbereich.
7. Eine totale und berechenbare Funktion, die nicht primitiv rekursiv ist.
8. Eine Funktion f, sodass $L = \{w \mid M_w \text{ berechnet } f\}$ entscheidbar ist.
9. Eine berechenbare Funktion f, sodass $L = \{w \mid M_w \text{ berechnet } f\}$ entscheidbar ist.
10. Eine nicht berechenbare Funktion mit endlichem Wertebereich.
11. Eine berechenbare Funktion mit einem nicht rekursiv aufzählbarem Wertebereich.
12. Eine nicht berechenbare Funktion mit endlichem Definitionsbereich.

Das Postsche Korrespondenzproblem

(Vorlesungseinheiten 17-19)

Aufgabe 48

Geben Sie für jede der folgenden Instanzen P des Postschen Korrespondenzproblems über $\Sigma = \{0, 1\}$ eine Lösung kürzester Länge an oder begründen Sie, warum diese keine Lösung besitzen.

1. $P = ((100, 1), (1, 01), (1, 010), (10, 001))$
2. $P = ((100, 10), (01, 1), (1010, 101))$
3. $P = ((001, 00), (11, 110), (10, 101), (101, 1010))$
4. $P = ((001, 10), (01, 0100), (011, 11))$
5. $P = ((100, 11), (010, 101), (0, 01))$
6. $P = ((00, 100), (10, 101), (11, 01), (010, 0))$
7. $P = ((10, 110), (001, 101), (1, 010), (101, 01))$
8. $P = ((01, 1001), (10, 01), (100, 10))$

Aufgabe 49

In der Vorlesung wurde das *modifizierte Postsche Korrespondenzproblem* MPCP auf das *Postsche Korrespondenzproblem* PCP reduziert.

Zeigen Sie, dass auch PCP $\leq$ MPCP gilt.

Erinnerung: PCP und MPCP sind wie folgt definiert:

<u>PCP</u>
Eingabe: Ein Alphabet Σ und Wortpaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^+ \times \Sigma^+$.
Frage: Gibt es eine Folge $(i_1, \ldots, i_n) \in [k]^n$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

<u>MPCP</u>
Eingabe: Ein Alphabet Σ und Wortpaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^+ \times \Sigma^+$.
Frage: Besitzt diese PCP-Instanz eine Lösung $(i_1, \ldots, i_n)$ mit $i_1 = 1$?

Aufgabe 50

Zeigen Sie: PCP_Σ ist genau dann entscheidbar, wenn Σ ein unäres Alphabet ist.

Aufgabe 51

Gegeben sei die folgende Instanz K des Postschen Korrespondenzproblems:

$$K = ((0, 10), (01, 100), (11, 1)).$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Idee des Beweis auf Vorlesungsfolie 18.5 anhand eines konkreten Beispiels zu illustrieren.

1. Geben Sie eine möglichs kurze Lösung von K an.
2. Geben Sie die Grammatiken G_1 und G_2 aus dem Beweis an.
3. Geben Sie ein möglichst kurzes Wort $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ an.
4. Geben Sie die Syntaxbäume von w bezüglich G_1 und G_2 an.

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz

(Vorlesungseinheiten 20-22)

Aufgabe 52

Geben Sie zu jeder der folgenden arithmetischen Formeln F an, welche Variablen frei und welche gebunden in F vorkommen, und finden Sie passende Belegungen Φ („Phi") und Ψ („Psi"), sodass $\Phi(F)$ wahr und $\Psi(F)$ falsch ist.

1. $F = (\exists x((5 + x) = y) \wedge (\exists y((3 + y) = z))$
2. $F = (\forall z((z * x) = (z + y)))$
3. $F = (\forall y \exists z(y = (x + z)))$
4. $F = (((x + y) = (x * y)) \wedge \neg((x + y) = 0))$
5. $F = (\exists y(x = (2 + (6 * y))) \wedge \exists y(x = (5 + (9 * y))))$

Aufgabe 53

Geben Sie eine arithmetische Formel F mit der jeweiligen Eigenschaft an.

1. $F(x, y, z)$ ist wahr $\iff$ $x \leq y < z$
2. $F(x)$ ist wahr $\iff$ x ist die Summe von zwei Quadratzahlen
3. $F(x, y)$ ist wahr $\iff$ x teilt y
4. $F(x)$ ist wahr $\iff$ x ist prim

Hinweise:

- Sie dürfen Klammern weglassen, wenn klar ist, welche Formel gemeint ist.
- Man schriebt oft $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ statt F, um hervorzuheben, dass $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ genau die freien Variablen in F sind.

Aufgabe 54

Zeigen Sie mithilfe der Definition der arithmetischen Repräsentierbarkeit, dass folgende Funktionen f arithmetisch repräsentierbar sind.

1. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \sqrt{x}$, falls x eine Quadratzahl ist (sonst undefiniert)
2. $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \min(x, y)$
3. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 3x^2 \dot{-} 2x$
4. $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \mathrm{ggT}(x, y)$

Aufgabe 55

Sei $(n_0, n_1, n_2) = (1, 2, 0)$ eine endliche Zahlenfolge. Bestimmen Sie zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ für die gilt:

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}\colon G(a, b, i, n_i).$$

Aufgabe 56

Sei $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 2, 3)$ eine endliche Zahlenfolge. Bestimmen Sie zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ für die gilt:

$$\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}\colon G(a, b, i, n_i).$$

Aufgabe 57

Zeigen Sie mithilfe des $G(a, b, i, \cdot)$-Prädikats, dass die Fakultätsfunktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n!$$

arithmetisch repräsentierbar ist.

Die Klassen P und NP

(23-28)

Aufgabe 58

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, M_1 die 1-Band DTM

$$M_1 = (\{0,1,2,3,4\}, \Sigma, \Sigma \cup \{m, \square\}, \delta, 0, \square, \{4\})$$

mit

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,m)$	$\delta(q,\square)$
0	$(0,a,R)$	$(1,m,L)$		
1	$(2,m,R)$		$(1,m,L)$	
2		$(1,m,L)$	$(2,m,R)$	$(3,\square,L)$
3			$(3,m,L)$	$(4,\square,N)$

und L die von M_1 akzeptierte Sprache.

1. Geben Sie L in Mengenschreibweise an.
2. Geben Sie $\text{time}_{M_1}(x)$ für alle $x \in L$ an.
3. Geben Sie eine 2-Band-DTM M_2 für L an, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$\text{time}_{M_2}(x) \leq |x| + 1.$$

4. Gibt es eine Mehrband-DTM M für L, sodass die Ungleichung

$$\text{time}_M(x) \leq |x|$$

für mindestens ein $x \in L$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 59

Sie sind Doktorand und arbeiten gerade an Ihrer Dissertation über Komplexitätstheorie. Plötzlich reißt ein Kollege die Bürotür auf und platzt voller Entsetzen heraus:

> *„Eine Turingmaschine, die nur $n+1$ Schritte machen darf, kann das Eingabewort nur einmal von links nach rechts durchlaufen und danach, wenn sie das erste Leersymbol nach dem Eingabewort sieht, in einem Schritt entscheiden, ob sie das Wort akzeptiert oder nicht. So ähnlich arbeiten doch endliche Automaten. Enthält dann* TIME$(n+1)$ *genau die regulären Sprachen?“*

Wie reagieren Sie darauf?

Aufgabe 60

Sie schreiben wieder an Ihrer Dissertation, bis Ihr Kollege wieder in Ihr Büro stürmt und stammelt:

> *„Enthält vielleicht* TIME(n) *genau die regulären Sprachen?“*

Wie reagieren Sie diesmal darauf?

Aufgabe 61

Seien Σ, Γ und Δ drei Alphabete, A eine Sprache über Σ, B eine Sprache über Γ und C eine Sprache über Δ.

Zeigen Sie:

1. $A \leq_p A$. (Reflexivität von $\leq_p$)
2. Wenn $A \leq_p B$ und $B \leq_p C$, dann $A \leq_p C$. (Transitivität von $\leq_p$)
3. Für $A = \emptyset$ und $B \neq \Gamma^*$ gilt $A \leq_p B$.
4. Für $A = \Sigma^*$ und $B \neq \emptyset$ gilt $A \leq_p B$.
5. Für $A \in \mathsf{P}$ und $\emptyset \neq B \neq \Gamma^*$ gilt $A \leq_p B$.
6. Wenn $A \leq_p B$ und A NP-hart, dann ist auch B NP-hart.

Aufgabe 62

Seien true und false nullstellige logische Junktoren (auch: *Konstanten*) mit $\mathcal{A}(\text{true}) = 1$ und $\mathcal{A}(\text{false}) = 0$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ Formeln, die nur Variablen, Konstanten und einen weiteren Junktor $\odot$ enthalten, nennen wir in dieser Aufgabe $\odot$-*Formeln*.

1. Passt die Belegung $\mathcal{A}$ zu Formeln F und G, dann gilt für die *Kontravalenz* $\oplus$:

   $$\mathcal{A}(F \oplus G) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\ 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) \neq \mathcal{A}(G). \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem in P liegt:

   <u>XOR-SAT</u>
   Eingabe: Eine $\oplus$-Formel.
   Frage: Ist F erfüllbar?

2. Passt die Belegung $\mathcal{A}$ zu Formeln F und G, dann gilt für die *Exklusion* $\bar{\wedge}$:

   $$\mathcal{A}(F \mathbin{\bar{\wedge}} G) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}(G) = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem NP-vollständig ist:

   <u>NAND-SAT</u>
   Eingabe: Eine $\bar{\wedge}$-Formel.
   Frage: Ist F erfüllbar?

3. Passt die Belegung $\mathcal{A}$ zu Formeln F und G, dann gilt für die *Nihilition* $\bar{\vee}$:

   $$\mathcal{A}(F \mathbin{\bar{\vee}} G) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 0 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem NP-vollständig ist:

   <u>NOR-SAT</u>

Eingabe: Eine $\bar{\vee}$-Formel.
Frage: Ist F erfüllbar?

4. Passt die Belegung $\mathcal{A}$ zu Formeln F und G, dann gilt für die *Implikation* $\rightarrow$:

$$\mathcal{A}(F \rightarrow G) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 0 \\ 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}(G) = 1. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem NP-vollständig ist:

   <u>IMPLY-SAT</u>
   Eingabe: Eine $\rightarrow$-Formel.
   Frage: Ist F erfüllbar?

5. Passt die Belegung $\mathcal{A}$ zu Formeln F und G, dann gilt für die *Implikation* $\leftrightarrow$:

$$\mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) \neq \mathcal{A}(G) \\ 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G). \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem in P liegt:

   <u>IMPLY-SAT</u>
   Eingabe: Eine $\leftrightarrow$-Formel.
   Frage: Ist F erfüllbar?

Aufgabe 63

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass folgendes Entscheidungsproblem für $k = 3$ NP-vollständig ist:

<u>kKNF-SAT</u>
Eingabe: Eine boolesche Formel F in KNF mit maximal k Literalen pro Klausel.
Frage: Ist F erfüllbar?

1. Zeigen Sie: 3KNF-SAT $\leq_p$ 5KNF-SAT.
2. Zeigen Sie: 5KNF-SAT $\leq_p$ 3KNF-SAT.

Aufgabe 64

Zeigen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$:

1. Das folgende Entscheidungsproblem liegt in P.

   <u>MAX-k-SAT</u>
   Eingabe: Eine boolesche Formel F.
   Frage: Gibt es ein Modell für F, das höchstens k Variablen in F mit 1 belegt?

2. Das folgende Entscheidungsproblem ist NP-vollständig.

   <u>MIN-k-SAT</u>
   Eingabe: Eine boolesche Formel F.
   Frage: Gibt es ein Modell für F, das mindestens k Variablen in F mit 1 belegt?

Aufgabe 65

Das Knotenfärbbarkeitsproblem (englisch *Vertex coloring problem*) besteht darin, die Knoten eines gegebenen Graphen so zu färben, dass keine zwei benachbarten Knoten mit derselben Farbe gefärbt werden.

Formal betrachten wir das folgende Entscheidungsproblem:

FÄRBBARKEIT
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Abbildung $\varphi\colon V \to [k]$ mit $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$?

Des Weiteren sei k-FÄRBBARKEIT das obige Problem für ein festes $k \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass 3-FÄRBBARKEIT NP-vollständig ist.

1. Zeigen Sie: 3-FÄRBBARKEIT $\leq_p$ 4-FÄRBBARKEIT.
2. Zeigen Sie: 4-FÄRBBARKEIT $\leq_p$ 3-FÄRBBARKEIT.

Aufgabe 66

Das Spezialisierungsproblem besteht darin, jeden Mitarbeiter eines Schichtbetriebs auf ein Arbeitsbereich zu spezialisieren, sodass in jeder Schicht für jeden Arbeitsbereich ein Spezialist vorhanden ist.

Formal betrachten wir das folgende Entscheidungsproblem:

SPEZIALISIERUNG
Eingabe: Endliche Mengen M, A und $S_1, \ldots, S_k \subseteq M$.
Frage: Gibt es eine Abbildung $s\colon M \to A$ mit $s(S_i) = A$ für alle $i \in [k]$?

Des Weiteren sei 2-SPEZIALISIERUNG das obige Problem für festes $k = 2$.

Zeigen Sie:

1. 2-SPEZIALISIERUNG $\in$ P.
2. SPEZIALISIERUNG ist NP-vollständig.

Aufgabe 67

Das folgende Problem besteht darin, für gegebene Listen von Studierenden, Lehrveranstaltungen, Terminen und Anmeldungen zu entscheiden, ob jeder Lehrveranstaltung ein Termin so zugeordnet werden kann, dass jeder Studierende einen überschneidungsfreien Stundenplan hat.

Formal definieren wir das Entscheidungsproblem STUNDENPLAN wie folgt:

STUNDENPLAN
Eingabe: Endliche Mengen S, L und T, sowie eine Relation $A \subseteq S \times L$.
Frage: Gibt es eine totale Funktion $g\colon L \to T$, sodass alle $\ell_1, \ell_2 \in L$ mit $\ell_1 \neq \ell_2$ und $\exists s \in S\colon (s, \ell_1), (s, \ell_2) \in A$ die Ungleichung $g(\ell_1) \neq g(\ell_2)$ erfüllen?

S, L, T und A stellen jeweils Mengen von Studierenden, Lehrveranstaltungen, Terminen und Anmeldungen dar. $(s, \ell) \in A$ besagt intuitiv, dass s sich für die Lehrveranstaltung ℓ angemeldet hat.

1. Zeigen Sie, dass Stundenplan NP-vollständig ist.
2. Geben Sie eine Polynomialzeitreduktion von Stundenplan auf SAT an.

Aufgabe 68

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $S \subseteq V$ eine beliebige Menge von Knoten. S heißt *stabil*, falls keine zwei Knoten aus S durch eine Kante verbunden sind, d. h. :

$$S \text{ stabil } \iff \forall u, v \in S\colon \{u, v\} \notin E.$$

Wir betrachten nun das folgende Problem:

<u>Stabilität</u>
Eingabe: Ein Graph G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine stabile Menge S der Größe $|S| = k$?

Zeigen Sie, dass Stabilität NP-vollständig ist.

Aufgabe 69

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NP-vollständig ist:

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und Zahlen $\ell, m \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| \leq \ell$ und $|\{e \in E \mid e \subseteq S\}| \geq m$?

Aufgabe 70

Analog zur Definition von M_w bezeichne in dieser Aufgabe F_w die durch das Wort $w \in \{0, 1\}^*$ codierte boolesche Formel.

1. Zeigen Sie, dass folgende Sprache coNP-vollständig bezüglich $\leq_p$ ist:

$$\text{UNSAT} = \{w \mid F_w \text{ ist unerfüllbar}\}.$$

2. Die Komplexitätsklasse DP (*Difference Polynomial-Time*) sei wie folgt definiert:

$$\mathsf{DP} = \{A \setminus B \mid A, B \in \mathsf{NP}\}.$$

   (a) In welcher Beziehung stehen die den Klassen DP, NP und coNP zueinenader?

   (b) Geben Sie eine bezüglich $\leq_p$ DP-vollständige Sprache an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort.

Wichtige Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen

(Vorlesungseinheiten 29-32)

Aufgabe 71

Eine *Sprachklasse* ist eine Menge von formalen Sprachen. Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ sind $\mathsf{co}\mathcal{C}$ und $\overline{\mathcal{C}}$ ebenfalls Sprachklassen mit $\mathsf{co}\mathcal{C} = \left\{L \,\middle|\, \overline{L} \in \mathcal{C}\right\}$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{L \mid L \notin \mathcal{C}\}$.

1. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Sprachklasse. Zeigen Sie:
   (a) $\mathsf{co}(\mathsf{co}\mathcal{C}) = \mathcal{C}$
   (b) $\overline{\mathsf{co}\mathcal{C}} = \mathsf{co}\overline{\mathcal{C}}$
2. Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ beliebige Sprachklassen. Zeigen Sie:
$$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \iff \mathsf{co}\mathcal{C}_1 \subseteq \mathsf{co}\mathcal{C}_2.$$
3. Zeigen Sie, dass eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ genau dann unter Komplement abgeschlossen ist, wenn $\mathcal{C} = \mathsf{co}\mathcal{C}$ gilt.
4. Geben Sie entweder eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ mit der jeweiligen Eigenschaft an oder begründen Sie, warum keine solche Sprachklasse existieren kann.
   (a) $\mathcal{C} = \mathsf{co}\mathcal{C}$
   (b) $\mathcal{C} \subsetneq \mathsf{co}\mathcal{C}$
   (c) $\mathsf{co}\mathcal{C} \subsetneq \overline{\mathcal{C}}$
   (d) $\mathsf{co}\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{C}$
   (e) $\overline{\mathcal{C}} = \mathsf{co}\mathcal{C}$
   (f) $\overline{\mathcal{C}} \subsetneq \mathsf{co}\mathcal{C}$

Aufgabe 72

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Welche der folgenden Aussagen implizieren welche? Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) f ist berechenbar

(b) f ist zeitkonstruierbar

(c) f ist platzkonstruierbar

Hierarchiesätze und die Sätze von Savitch, Immerman und Szelepcsényi

(Vorlesungseinheiten 32-36)

Aufgabe 73

Entscheiden Sie für jedes der gegebenen Klassenpaare, welche Klasse in der jeweils anderen als Teilmenge enthalten ist und welche nicht. Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $\mathsf{NTIME}(n^2)$ und $\mathsf{DSPACE}(n^3)$
2. $\mathsf{DTIME}(3n^2 + (\log n)^4)$ und $\mathsf{DTIME}(n^2 + 1)$
3. $\mathsf{coNSPACE}(2^n)$ und $\mathsf{DSPACE}(5^n)$
4. $\mathsf{NSPACE}\big(2^{(\log n)^2}\big)$ und $\mathsf{DSPACE}\big(n^{\mathcal{O}(\log n)}\big)$
5. $\mathsf{NTIME}(n)$ und $\mathsf{DTIME}(n^{n+2})$
6. $\mathsf{DSPACE}(n^3)$ und $\mathsf{NSPACE}(n)$
7. $\mathsf{DTIME}(n^2 + n \log n)$ und $\mathsf{DTIME}((n \log n)^2)$
8. $\mathsf{DSPACE}(2^{\mathcal{O}(n)})$ und $\mathsf{DSPACE}(3^{\mathcal{O}(n)})$
9. $\mathsf{NSPACE}((\log n)^2)$ und $\mathsf{DSPACE}(3^{(\log n)^3})$
10. $\mathsf{NSPACE}((\log n)^{\log n})$ und $\mathsf{NTIME}(n)$

Aufgabe 74

Begründen Sie die Inklusionsbeziehungen auf der letzten Seite im Foliensatz über Sprachenklassen.

Hinweis: Sie finden den Foliensatz unter

`https://www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/s19/eti2/`.

Der Lückensatz von Borodin

(Vorlesungseinheit 35)

Aufgabe 75

Welche der folgenden Implikationen gelten für beliebige Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $\mathsf{DTIME}(f) = \mathsf{DTIME}(g) \implies f \in \Theta(g)$
2. $f \in \Theta(g) \implies \mathsf{DTIME}(f) = \mathsf{DTIME}(g)$

Hinweis: Es gilt $f \in \Theta(g)$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$ gilt.

Aufgabe 76

Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \in \Omega(n)$ existiert, die nicht zeitkonstruierbar ist.

Die Translationssätze

(Vorlesungseinheit 37)

Aufgabe 77

In dieser Aufgabe betrachten wir die Klassen

$$\mathsf{DCSL} = \mathsf{DSPACE}(n) \qquad \text{und} \qquad \mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n).$$

Zeigen Sie:

1. $\mathsf{NL} \subsetneq \mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{PSPACE}$
2. $\{\mathsf{DCSL}, \mathsf{CSL}\} \cap \{\mathsf{P}, \mathsf{NP}\} = \emptyset$

Aufgabe 78

Zeigen Sie folgende Implikation:

$$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{L} \implies \mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{PSPACE}.$$

Aufgabe 79

In dieser Aufgabe betrachten wir die Klasse

$$\mathsf{E} = \bigcup_{k \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{kn}).$$

Zeigen Sie:

1. $\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$
2. $\mathsf{CSL} \subseteq \mathsf{E}$
3. $\mathsf{E} \neq \mathsf{PSPACE}$

Hinweise:

- EXP wird auch $\mathsf{EXPTIME}$ genannt.
- $\mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n)$.

Die Klasse NL

(Vorlesungseinheiten 38-39)

Aufgabe 80

Eine *starke Zusammenhangskomponente* (engl. *strongly-connected component*) eines gerichteten Graphen ist eine maximale Teilmenge C der Knoten, sodass jeder Knoten aus C von jedem anderen Knoten aus C erreichbar ist.

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NL-vollständig bezüglich $\leq_{\log}$ ist:

<u>SCC</u>
Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Enthält G genau k starke Zusammenhangskomponenten?

Aufgabe 81

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein *Pfad der Länge* ℓ ist ein Tupel $(v_0, \dots, v_\ell) \in V^{\ell+1}$ mit $(v_{i-1}, v_i) \in E$ für alle $i \in [\ell]$. Ein Pfad, in dem die erste und letzte Komponente gleich sind, heißt *Kreis*. Kreise der Länge 0 nennt man *trivial*. Ein *gerichteter kreisfreier Graph* (engl. *directed acyclic graph*, kurz: *DAG*) ist ein gerichteter Graph, der keine nichttrivialen Kreise enthält.

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NL-vollständig bezüglich $\leq_{\log}$ ist:

<u>DAGAP</u>
Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$.
Frage: Ist G ein gerichteter kreisfreier Graph mit einem Pfad von s nach t?

Die Klasse PSPACE

(Vorlesungseinheit 40)

Aufgabe 82

Zeigen Sie, dass das folgende Problem PSPACE-vollständig bezüglich $\leq_{\log}$ ist:

<u>LinearSpaceMembership</u>
Eingabe: Eine 1-Band-TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \square, F)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$.
Frage: Wird w von M akzeptiert, ohne dass ein Leersymbol $\square$ gelesen wird?

Alte Prüfungen

(Seit Wintersemester 2017/2018)

Aufgabe 83

Lösen Sie die Aufgaben der Modulprüfung *Berechenbarkeit und Komplexität* vom Wintersemester 2017/2018.

Aufgabe 84

Lösen Sie die Aufgaben der Modulprüfung *Berechenbarkeit und Komplexität* bzw. *Theoretische Informatik II* vom Sommersemester 2018.

Aufgabe 85

Lösen Sie die Aufgaben der Modulprüfung *Berechenbarkeit und Komplexität* bzw. *Theoretische Informatik II* vom Wintersemester 2018/2019.