Ergänzungsblatt 2

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit Variablenmenge $V = \{S, A, B, C\}$, Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und Regelmenge

$$P = \{(S, aSBC), (S, aBC), (CB, BC), (aB, ab), (bB, bb), (bC, bc), (cC, cc)\}.$$

Diese 7 Produktionen lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$S \to aSBC \mid aBC \qquad CB \to BC \qquad aB \to ab \qquad bB \to bb \qquad bC \to bc \qquad cC \to cc$$

1. Wörter aus $(V \cup \Sigma)^*$ heißen *Satzformen*. Für Satzformen x und y gilt: In G lässt sich y genau dann in einem Schritt von x ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G y$), wenn gilt:

   $$\exists u, v, w_1, w_2 \in (V \cup \Sigma)^* \colon (x = w_1 u w_2 \wedge y = w_1 v w_2 \wedge (u, v) \in P).$$

   Beispiele:

   - Für $u = CB$, $v = BC$, $w_1 = Sa$ und $w_2 = b$ erhält man $SaCBb \Rightarrow_G SaBCb$.
   - Es gilt $aSc \not\Rightarrow_G abc$, da keine entsprechende u, v, w_1, w_2 existieren. Dafür müsste eine Regel $u \to v$ in P existieren mit einem S in der linken Seite und einem b in der rechten.

   Geben Sie Satzformen u, v, w_1, w_2 an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

   (a) $CBA \Rightarrow_G BCA$

   (b) $aBc \Rightarrow_G abc$

   (c) $abC \Rightarrow_G abc$

2. In G lässt sich y genau dann in n Schritten von x ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G^n y$), wenn gilt:

   $$\exists w_1, \ldots, w_{n-1} \in (V \cup \Sigma)^* \colon x \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G w_2 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w_{n-1} \Rightarrow_G y.$$

   Beispiel: Es gilt $aCB \Rightarrow_G aBC \Rightarrow_G abC \Rightarrow_G abc$, also $aCB \Rightarrow_G^3 abc$.

   Geben Sie Ableitungsketten an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

(a) $S \Rightarrow_G^3 aaaBCBCBC$

(b) $BCBCBC \Rightarrow_G^3 BBBCCC$

(c) $aBBBCCC \Rightarrow_G^6 abbbccc$

3. In G lässt sich y genau dann von x ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G^* y$), wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \Rightarrow_G^n y$.

   Zeigen Sie: $aabbcc \in L(G)$.

4. Von welchen Chomsky-Typen ist G?

Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Von welchen Chomsky-Typen sind folgende Grammatiken und welche Sprachen erzeugen sie?

1. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aSb \mid ab\}$.
2. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aS \mid bS \mid a \mid b\}$.
3. $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to TS \mid Ta, TT \to aT\}$.

Vorbereitungsaufgabe 3

Gegeben sei folgende Sprache über dem ALphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L = \{a^m b^n \mid m, n \geq 1\}.$$

Geben Sie jeweils eine Grammatik G mit höchstens 4 Produktionen an, die L erzeugt.

1. G soll vom Chomsky-Typ 3 sein.
2. G darf nur eine Variable besitzen.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gelten für eine beliebige Sprache L? Begründen Sie die Korrektheit der Aussage oder geben Sie eine Sprache L an, die sie widerlegt.

1. $L^+ \subseteq L^*$
2. $\forall k \geq 1\colon L^k \subseteq L^+$
3. $\forall k \geq 0\colon L^k \subseteq L^*$
4. $(L^2)^* = (L^*)^2$
5. $\varepsilon \in L^*$
6. $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$

Präsenzaufgabe 2

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C über einem Alphabet Σ:

1. $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$
2. $A(B \cup C) = AB \cup AC$
3. $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$
4. $A^* A^* = A^*$

Präsenzaufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen L über Σ eine Grammatik G mit $L = L(G)$ an.

1. $L = \{a^m b^n \mid m < n\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade}\}$
3. $L = \left\{a^k b^\ell a^m \,\middle|\, k = \ell \vee \ell = m\right\}$
4. $L = \{a^m b^m a^n b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommen zwei } b\text{s nebeneinander vor}\}$
6. $L = \{a^m b^n a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und A und B Sprachen mit $|A| = m$ und $|B| = n$.

Bekanntlich ist mn ist eine obere Schranke für $|AB|$, weil für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|AB| \leq mn$ gilt. Die Schranke ist außerdem scharf, weil für alle $m, n \in \mathbb{N}$ Sprachen A, B existieren mit $|AB| = mn$, z. B. $A = \left\{a^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq m\right\}$ und $B = \left\{b^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq n\right\}$.

1. Geben Sie eine scharfe untere Schranke $s(m, n)$ für $|AB|$ an.

   Hinweis: Betrachten Sie die Fälle (1) $m = 0 \vee n = 0$ und (2) $m, n > 0$ getrennt.

2. Zeigen Sie, dass $s(m, n)$ eine untere Schranke ist, indem Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung zeigen:
$$|AB| \geq s(m, n).$$

3. Zeigen Sie, dass $s(m, n)$ eine scharfe Schranke ist, indem Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ Sprachen A und B angeben mit $|AB| = s(m, n)$.

Knobelaufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede beliebige Sprache L gilt

$$L \subseteq L^3 \implies L \subseteq L^2.$$

Hinweise:

- Wenn die Aussage stimmt, nehmen Sie an, dass eine beliebige Sprache L die Inklusion $L \subseteq L^3$ erfüllt und zeigen Sie danach, dass diese Sprache auch die Inklusion $L \subseteq L^2$ erfüllen muss.
- Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Ein Gegenbeipiel wäre in diesem Fall eine Sprache L mit $L \subseteq L^3$ und $L \nsubseteq L^2$.

Knobelaufgabe 3

Geben Sie eine Typ-1-Grammatik mit höchstens 10 Produktionen an, die die Sprache

$$L = \{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt.