Ergänzungsblatt 3

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B, C und D:

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \implies AC \subseteq BD.$$

Vorbereitungsaufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen nicht für beliebige Sprachen A und B gelten.

1. $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$
2. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$
3. $(A \setminus B)^* = A^* \setminus B^*$

Vorbereitungsaufgabe 3

Seien $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik und $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Eine Ableitung

$$S \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w$$

heißt *Linksableitung* (bzw. *Rechtsableitung*), falls bei jedem Ableitungsschritt die am weitesten links (bzw. rechts) stehende Variable ersetzt wurde.

Wir betrachten die 4 Ableitungen auf Vorlesungsfolie 6.4.

1. Welche davon sind Linksableitungen?
2. Welche davon sind Rechtsableitungen?
3. Geben Sie zu jeder Ableitung den entsprechenden Syntaxbaum an.

Vorbereitungsaufgabe 4

Für Wörter x, y über einem Alphabet Σ definieren wir folgende Relationen:

$$\begin{aligned} x \text{ ist } \textit{Präfix} \text{ von } y &:\Longleftrightarrow \exists v \in \Sigma^* \colon y = xv \\ x \text{ ist } \textit{Suffix} \text{ von } y &:\Longleftrightarrow \exists u \in \Sigma^* \colon y = ux \\ x \text{ ist } \textit{Infix} \text{ von } y &:\Longleftrightarrow \exists u, v \in \Sigma^* \colon y = uxv \end{aligned}$$

1. Für welche der folgenden Wörter x und y über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist x ein Präfix/Suffix/Infix von y?

(a) $x = ab$, $y = abbc$
(b) $x = cb$, $y = bccb$
(c) $x = aba$, $y = ababa$
(d) $x = bb$, $y = abbac$
(e) $x = ab$, $y = bbac$
(f) $x = acb$, $y = acb$

2. Listen Sie alle Präfixe, alle Suffixe und alle Infixe von $abab$ auf.
3. Wie viele Präfixe bzw. Suffixe besitzt ein Wort der Länge n?
4. Wie viele Infixe besitzt ein Wort der Länge n mindestens? Wie viele höchstens?

Hinweis: Statt *Infix* verwendet man auch die Begriffe *Faktor* und *Teilwort*.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet. Die Relationen Präfix, Suffix und Infix aus den Vorbereitungsaufgaben sind Ordnungsrelationen auf Σ^*. Zeigen Sie dies für die Infix-Relation.

Präsenzaufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* n (in Zeichen: $x \equiv y \mod n$), falls eine ganze Zahl k existiert mit $x = y + kn$, d. h.

$$x \equiv y \mod n :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \colon x = y + kn.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch?

1. (a) $13 \equiv 1 \mod 3$
   (b) $11 \equiv 5 \mod 4$
   (c) $-8 \equiv 7 \mod 5$
   (d) $-2 \equiv -9 \mod 4$
   (e) $6 \equiv -5 \mod 1$
   (f) $5 \equiv -7 \mod 6$

2. Geben Sie zu jeder Kongruenz die 5 kleinsten nichtnegativen Zahlen x an, die die jeweilige Kongruenz erfüllen.

   (a) $x \equiv 0 \mod 3$
   (b) $x \equiv 1 \mod 3$
   (c) $x \equiv 2 \mod 3$

3. Zeigen Sie, für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass die Kongruenzrelation modulo n eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

Wichtiger Hinweis:

Die Kongruenz modulo n sollte nicht mit der Modulooperation verwechselt werden. Die Kongruenz modulo n ist eine binäre <u>Relation</u> auf $\mathbb{Z}$ und die Modulooperation eine <u>Funktion</u> $\mathrm{mod} \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ mit

$$m \bmod n = m - n \cdot \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die *untere Gaußklammer* mit $\lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ sei.

Präsenzaufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie für eine beliebige Sprache L über Σ:

$$L \subseteq L^2 \land L \neq \emptyset \iff \varepsilon \in L.$$

Präsenzaufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C über Σ:

1. $(A^*)^* = A^*$
2. $A^+ \subseteq A \iff A^2 \subseteq A$
3. $AB = BC \implies A^*B = BC^*$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

Präsenzaufgabe 5

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Sprachen A und B?

1. $A^* \cap B^* = (A^* \cap B^*)^*$.
2. $A^* \cup B^* = (A^* \cup B^*)^*$.

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Präsenzaufgabe 6

Seien $\Sigma = \{+, \cdot, x, y, z\}$ ein Alphabet und $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik mit den Produktionen

$$S \to S + S \mid S \cdot S \mid x \mid y \mid z.$$

1. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist, indem Sie zwei verschiedene Syntaxbäume für das Wort $x + y \cdot z$ angeben.
2. Geben Sie zu jedem der zwei Syntaxbäume die entsprechende Linksableitung an.
3. Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$.
4. Keine Typ-3-Sprache ist inhärent mehrdeutig. Zeigen Sie, dass $L(G)$ nicht inhärent mehrdeutig ist, indem Sie eine Typ-3-Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ konstruieren. Sie müssen die Korrektheit Ihrer Konstruktion nicht beweisen.

Präsenzaufgabe 7

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $x = ababb$ ein Wort über Σ und $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit Produktionen

$$S \to aTb \mid aSba \mid b$$
$$T \to aT \mid bTb \mid bbSa \mid a.$$

1. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass das Wortproblem für Typ-1-Sprachen entscheidbar ist. Verwenden Sie den Algorithmus aus dem Beweis dieses Satzes, um das Wortproblem für G und x zu entscheiden.
2. Im Rahmen dieser Aufgabe nennen wir eine Grammatik (V, Σ, P, S) *linear*, falls für jede Produktion $(u, v) \in P$ gilt: $u \in V$ und $v \in \Sigma^* V \Sigma^* \cup \Sigma^*$.

   Ist G linear?
3. Verändern Sie ihn so, dass er das Wortproblem für lineare Grammatiken in quadratischer Zeit löst.

   Zeigen Sie die quadratische Laufzeit Ihres Algorithmus, indem Sie Konstanten $a, b, c > 0$ mit $|T| \leq an^2 + bn + c$ für $n = |x|$ finden.
4. Verwenden Sie den veränderten Algorithmus, um das Wortproblem für G und x zu entscheiden.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Obwohl die Kongruenzrelation modulo n und die Modulooperation nicht verwechselt werden sollten, stehen beide Konzepte in enger Beziehung zueinander. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt nämlich:

(1) $x \equiv y \mod n \iff x \bmod n = y \bmod n$

(2) $x = y \bmod n \iff x \equiv y \mod n \land 0 \leq x < n$

Zeigen Sie beide Äquivalenzen.

Knobelaufgabe 2

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die binäre Relation $\sim$ auf Σ^* mit

$$x \sim y :\iff \exists u \in \Sigma^* : xu = uy$$

eine Äquivalenzrelation ist.