Universität Stuttgart

Ergänzungen zu Theoretische Informatik I
Wintersemester 2019
Carlos Camino

Ergänzungsblatt 4

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Studieren Sie die Definition der Kongruenz modulo n aus Ergänzungsblatt 3, Präsenzaufgabe 2.

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $Q = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $F = \{1, 2\}$ drei Mengen und $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ eine Funktion mit

$$(0, a) \mapsto 0,\ (0, b) \mapsto 1,\ (1, a) \mapsto 0,\ (1, b) \mapsto 2,\ (2, a) \mapsto 1 \text{ und } (2, b) \mapsto 2.$$

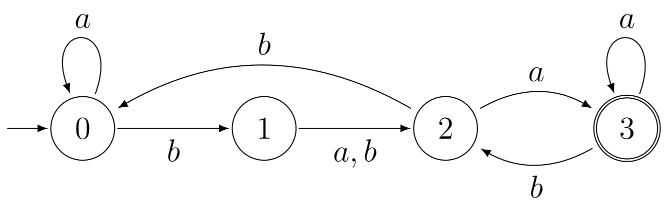
Als Tabelle:

δ	a	b
0	0	1
1	0	2
2	1	2

1. Überprüfen Sie, dass $M = (Q, \Sigma, \delta, 0, F)$ ein (formal korrekter) DFA ist.
2. Zeigen Sie $\hat{\delta}(1, abbab) = 2$ durch wiederholtes Anwenden der Definition von $\hat{\delta}$.
3. Geben Sie M grafisch an.
4. Welche grafische Bedeutung hat die Gleichung aus Teilaufgabe 2?
5. Verwenden Sie die in der Vorlesung beschriebene Methode, um eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = T(M)$ zu konstruieren.

Vorbereitungsaufgabe 3

Geben Sie den folgenden DFA M als 5-Tupel an:



Analog zu Vorbereitungsaufgabe 2 kann die Überführungsfunktion auch als Tabelle angegeben werden.

Vorbereitungsaufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ grafisch einen minimalen DFA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

Ein DFA heißt *minimal*, wenn kein DFA mit weniger Zuständen existiert, der dieselbe Sprache akzeptiert.

1. $L = \Sigma^*$
2. $L = \emptyset$
3. $L = \{\varepsilon\}$
4. $L = \Sigma$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 1 \mod 3\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aba \text{ ist Präfix von } w\}$

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit

$$P = \{S \to aSb \mid \varepsilon\}$$

die Sprache $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$ erzeugt.

Präsenzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit

$$P = \{S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \varepsilon\}$$

die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ erzeugt.

Präsenzaufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ grafisch einen minimalen DFA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $L = \{ubv \mid u, v \in \Sigma^* \wedge |u| = 2\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade und } |w|_b \text{ ungerade}\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid abba \text{ ist ein Suffix von } w\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid abab \text{ ist ein Infix von } w\}$
5. $L = \{a^m b^n \mid m \equiv 2 \mod 3 \wedge n \equiv 0 \mod 2\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ ist ein Präfix und } ba \text{ ein Suffix von } w\}$

Präsenzaufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ grafisch einen minimalen DFA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aabb \text{ ist } \underline{\text{kein}} \text{ Infix von } w\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2 \wedge |w|_b = 1\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1 \vee |w|_b \geq 2 \vee |w|_c \geq 3\}$

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Seien $m \geq 1$ eine natürliche Zahl und Σ ein m-elementiges Alphabet. Geben Sie einen DFA an, der die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ in } w \text{ kommt jedes Element von } \Sigma \text{ vor}\}$$

über Σ akzeptiert und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Knobelaufgabe 2

Seien $a, b, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$ beliebig.

1. Zeigen Sie:
   (1) $(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + b) \bmod n$
   (2) $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot b) \bmod n$
2. Welche der folgenden Gleichungen gelten für beliebige $a, b, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$ und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.
   (3) $(a + b) \bmod n = (a \bmod n) + (b \bmod n)$
   (4) $(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$
   (5) $(a \cdot b) \bmod n = (a \bmod n) \cdot (b \bmod n)$
   (6) $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot (b \bmod n)) \bmod n$