Ergänzungsblatt 5

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für die Sprache

$$L = \{b, aa, ab, bb, abb\}$$

über Σ grafisch den minimalen DFA an, der L akzeptiert.

Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $G' = (\{S, T\}, \Sigma, P', S)$ die Grammatik aus Präsenzaufgabe 6.4 vom Ergänzungsblatt 3 mit Produktionen

$$\begin{aligned} &S \to xT \mid yT \mid zT \mid x \mid y \mid z \\ &T \to +S \mid \cdot S. \end{aligned}$$

Geben Sie einen minimalen DFA an, der $L(G')$ akzeptiert.

Vorbereitungsaufgabe 3

Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine positive natürliche Zahl. Im Stellenwertsystem zur Basis b werden natürliche Zahlen als Wörter über dem Alphabet

$$\Sigma = \begin{cases} \{0, \ldots, b-1\} & \text{für } b \geq 2 \\ \{1\} & \text{für } b = 1 \end{cases}$$

dargestellt. Man nennt dann $w \in \Sigma^*$ eine *Darstellung zur Basis* b der Zahl

$$w_b = \sum_{k=1}^{|w|} w[k] \cdot b^{|w|-k}.$$

Dabei ist $w[k]$ der Buchstabe an der k-ten Position des Wortes w, d. h. $w = w[1] \ldots w[|w|]$.

Hinweise:

- Formal ist $(\cdot)_b \colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$ eine Funktion, die jeder Ziffernfolge $w \in \Sigma^*$ eine natürliche Zahl $w_b \in \mathbb{N}$ zuordnet.

- Man beachte, dass der Fall $\varepsilon_b = 0$ durch obige Definition auch abgedeckt wird, da leere Summen (solche, bei denen die untere Grenze größer als die obere ist) als 0 definiert sind.
- Statt *Darstellung zur Basis* b sagt man auch kurz b-*äre Darstellung*. Für $b = 1$ nennt man diese *Unärdarstellung*, für $b = 2$ *Binärdarstellung* und für $b = 3$ *Ternärdarstellung*.

1. Bestimmen Sie:

   (a) $(11111)_1$
   (b) $(1^{17})_1$
   (c) $(1101)_2$
   (d) $(01010)_2$
   (e) $(11011)_2$
   (f) $(0120)_3$
   (g) $(1021)_3$
   (h) $(123)_4$
   (i) $(1203)_4$
   (j) $(2401)_5$
   (k) $(357)_8$
   (l) $(00925)_{10}$

2. Bestimmen Sie:
   (a) Eine Binärdarstellung der Zahl 55.
   (b) Eine Ternärdarstellung der Zahl 64.
   (c) Eine Darstellung zur Basis 4 der Zahl 120.
   (d) Eine Darstellung zur Basis 5 der Zahl 248.

3. Seien nun $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ beliebig. Geben Sie $(wa)_b$ und $(aw)_b$ in Abhängigkeit von a, b, w_b und $|w|$ an.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ ihr Komplement. Zeigen Sie, dass $\overline{L}$ regulär ist, wenn L regulär ist.

Präsenzaufgabe 2

Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen grafisch einen minimalen DFA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid abc \text{ ist ein Faktor von } w\text{, aber } bb \text{ nicht}\}$
2. $L = \{a^m b a^n \mid m + n \equiv 1 \mod 3\}$
3. $L = \{\mathrm{bin}(4k) \mid k \in \mathbb{N}\}$
4. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a \equiv 2|w|_b + 1 \mod 5\}$

Hinweis: Mit $\mathrm{bin}(n)$ bezeichnen wir die Binärdarstellung von $n \in \mathbb{N}$ ohne führende Nullen. Beispiele: $\mathrm{bin}(0) = 0$, $\mathrm{bin}(6) = 110$ und $\mathrm{bin}(13) = 1101$.

Präsenzaufgabe 3

Seien $b, n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen mit $b \geq 2$ und $\Sigma = \{0, \ldots, b-1\}$ ein Alphabet. Geben Sie einen DFA M an, der die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w_b \equiv 1 \mod n\}$$

über Σ akzeptiert und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Hinweis: Sie dürfen die Aussagen aus folgenden Aufgaben als bewiesen annehmen:

- Ergänzungsblatt 3, Knobelaufgabe 1
- Ergänzungsblatt 4, Knobelaufgabe 2

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ ein Alphabet. Geben Sie grafisch einen möglichst kleinen DFA an, der die Sprache

$$L = \left\{w \in \Sigma^* \;\middle|\; (w_3)^2 \equiv 0 \mod 6\right\}$$

über Σ akzeptiert.

Knobelaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und L die Menge an Wörtern über Σ mit gerade vielen as in geraden Positionen und ungerade vielen bs in ungeraden Positionen. Formal:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |\{i \mid w[2i] = a\}| \text{ gerade} \wedge |\{i \mid w[2i+1] = b\}| \text{ ungerade}\}.$$

Geben Sie grafisch einen möglichst kleinen DFA für L an.

Hinweis: Für die Bedeutung von $w[2i]$ bzw. $w[2i+1]$ siehe Vorbereitungsaufgabe 3.

Knobelaufgabe 3

Seien Σ ein Alphabet und w ein Wort über Σ. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen über Σ einen DFA an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktionen.

1. $w\Sigma^*$
2. $\Sigma^* w$
3. $\Sigma^* w \Sigma^*$

Hinweis: Beim Produkt (= Konkatenation) von Sprachen lässt man bei einelementigen Sprachen die Mengenklammern oft weg. Somit sind in dieser Aufgabe eigentlich die Sprachen $\{w\}\Sigma^*$, $\Sigma^*\{w\}$ und $\Sigma^*\{w\}\Sigma^*$ gemeint.