Ergänzungsblatt 6

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ grafisch einen minimalen NFA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $aba\Sigma^*$
2. $\Sigma^* aba\Sigma^*$
3. $\Sigma^* aba$
4. $\Sigma^2 a\Sigma^*$
5. $\Sigma^* a\Sigma^2$

Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $G = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit Produktionen

$$S \to aT \mid b \qquad T \to bT \mid bU \qquad U \to bS \mid a \mid b.$$

Verwenden Sie die auf Vorlesungsfolien 11.6 und 12.1 beschriebene Methode, um einen NFA M mit $T(M) = L(G)$ zu konstruieren.

Geben Sie M sowohl als Tupel als auch grafisch an.

Vorbereitungsaufgabe 3

Sei $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \delta, \{p, q\}, \{q\})$ ein NFA mit folgender Überführungsfunktion δ:

δ	a	b
p	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{p\}$	$\emptyset$

1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{p\}, ab)$ durch wiederholtes Anwenden der Definition von $\hat{\delta}$ (siehe Vorlesungsfolie 9.7).
2. Geben Sie M grafisch an.
3. Geben Sie folgende Potenzmengen explizit an:

   (a) $\mathcal{P}(\emptyset)$ (b) $\mathcal{P}(\{1\})$ (c) $\mathcal{P}(\{1,2\})$ (d) $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

   Hinweise:

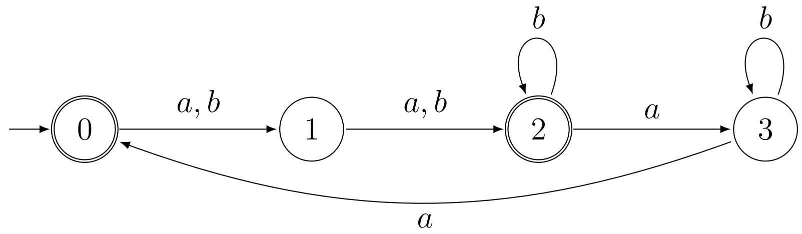
- Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A, d. h.: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.
- Alternative Schreibweisen für $\mathcal{P}(A)$ sind unter anderem 2^A und $\mathrm{Pot}(A)$.
- Für eine endliche Menge A besitzt $\mathcal{P}(A)$ genau $2^{|A|}$ Elemente.

4. Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion aus Vorlesungsfolie 10.6, um den zu M entsprechenden Potenzmengenautomat M'zu konstruieren.

   Geben Sie M' sowohl als Tupel als auch grafisch an. Beachten Sie, dass M' genau $2^2 = 4$ Zustände besitzen sollte.

Vorbereitungsaufgabe 4

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der folgende DFA:



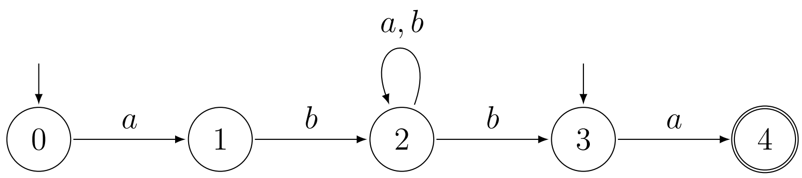
Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Wörter $w \in \Sigma^*$ existieren, die jeweilige Aussage (a) erfüllen (b) nicht erfüllen.

1. $\forall q \in Q\colon \exists p \in Q\colon \hat{\delta}(p, w) = q$
2. $\forall p \in Q\colon \exists q \in Q\colon \hat{\delta}(p, w) = q$
3. $\exists q \in Q\colon \forall p \in Q\colon \hat{\delta}(p, w) = q$
4. $\exists p \in Q\colon \forall q \in Q\colon \hat{\delta}(p, w) = q$

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ der folgende NFA mit Zustandsmenge $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Startzustandsmenge $S = \{0, 3\}$ und Endzustandsmenge $F = \{4\}$:



1. Geben Sie eine möglichst einfache Darstellung von $T(M)$ an.

2. Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion, um einen DFA M' mit $T(M') = T(M)$ zu konstruieren. Geben Sie M' grafisch an. Nicht erreichbare Zustände müssen nicht gezeichnet werden.

Präsenzaufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Kartenspiel:

> Zuerst notieren Sie auf ein Blatt Papier eine Folge von Anweisungen. Dann legt Ihr Gegner vier Spielkarten so auf den Tisch, dass diese einen Ring bilden. Dabei kann jede Spielkarte, unabhängig von den anderen, auf- oder zugedeckt liegen. Danach führt er nacheinander Ihre Anweisungen aus.
>
> Mögliche Anweisungen sind:
>
> a: Ihr Gegner dreht eine Karte um.
>
> b: Ihr Gegner dreht zwei benachbarte Karten um.
>
> c: Ihr Gegner dreht zwei nicht benachbarte Karten um.
>
> Sie gewinnen das Spiel, sobald alle vier Karten gleich liegen. In diesem Fall ignoriert der Gegner alle weiteren Anweisungen.

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel mit Sicherheit gewinnt?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe der Automatentheorie.

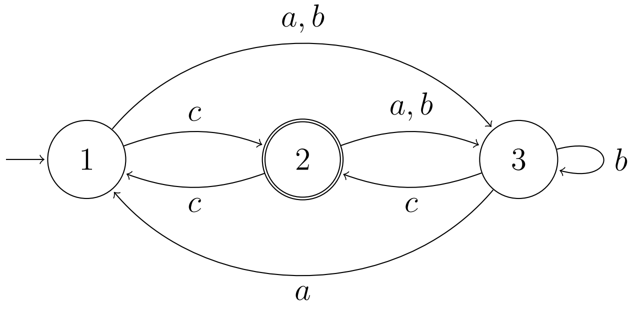
Präsenzaufgabe 3

Seien $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DFA und w ein Wort über dem Alphabet Σ. w heißt *synchronisierend* für M, falls gilt:

$$\exists q \in Q \colon \forall p \in Q \colon \hat{\delta}(p, w) = q.$$

Sei $\mathrm{sync}(M)$ die Menge aller synchronisierenden Wörter für M.

1. Sei M der folgende DFA:



   Welche der Wörter abc, aaa, $aacc$ und cab sind in $\mathrm{sync}(M)$ enthalten?

2. Zeigen Sie, dass $\mathrm{sync}(M)$ für jeden DFA M regulär ist.

Präsenzaufgabe 4

[Bitte Hinweis in der Musterlösung beachten!]

Seien Σ ein Alphabet und L eine Sprache über Σ.

1. Zeigen Sie für jeden DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der L akzeptiert:

$$\forall x, y \in \Sigma^*\colon \hat{\delta}(s, x) = \hat{\delta}(s, y) \implies \forall w \in \Sigma^*\colon (xw \in L \iff yw \in L).$$

2. Die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq |w|_b\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ ist nicht regulär.

   (a) Skizzieren Sie einen (unendlichen) Automaten, der L akzeptiert.

   (b) Begründen Sie anhand von Teilaufgabe 1 kurz, warum L nicht regulär sein kann.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel aus Präsenzaufgabe 2 mit Sicherheit gewinnt, wenn das Spiel mit 3 bzw. 5 statt 4 Karten gespielt wird?

Knobelaufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Kartenspiel:

> Zuerst notieren Sie auf ein Blatt Papier eine Folge von Anweisungen. Dann legt Ihr Gegner drei Spielkarten nebeneinander auf den Tisch, jeweils auf- oder zugedeckt, und führt nacheinander Ihre Anweisungen aus.
>
> Mögliche Anweisungen sind:
>
> a: Ihr Gegner dreht alle drei Karten um.
>
> b: Ihr Gegner dreht zwei benachbarte Karten um.
>
> c: Ihr Gegner dreht zwei nicht benachbarte Karten um.
>
> Sie gewinnen das Spiel, sobald alle drei Karten aufgedeckt sind. In diesem Fall ignoriert der Gegner alle weiteren Anweisungen.

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel mit Sicherheit gewinnt?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe der Automatentheorie.

Knobelaufgabe 3

Die *Černý-Vermutung* besagt, dass $(n-1)^2$ eine obere Schranke für die Länge des kürzesten synchronisierenden Wortes eines DFA mit n Zuständen ist (vgl. Präsenzaufgabe 3). Sie wurde 1964 vom Mathematiker Jan Černý aufgestellt und ist bis heute ein offenes Problem der theoretischen Informatik.

Falls $(n-1)^2$ tatsächlich eine obere Schranke ist, kann man zeigen, dass diese *scharf* ist, indem man für jedes $n \geq 1$ einen DFA mit n Zuständen angibt, bei dem das kürzeste synchronisierende Wort genau die Länge $(n-1)^2$ hat.

Geben Sie einen DFA M mit $n = 3$ Zuständen an, sodass das kürzeste synchronisierende Wort w bezüglich M genau die Länge $(n-1)^2 = 4$ besitzt. Wie sieht dann w aus? Lässt sich diese Konstruktion für ein beliebiges n verallgemeinern?