Ergänzungsblatt 7

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Gegeben Sie für jeden regulären Ausdruck (engl. *regular expression*, kurz *RE*) γ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an, welche der Wörter ε, a, bb, bab, $abab$ und $bbaa$ in $L(\gamma)$ enthalten sind.

1. $\gamma = (ab)^*$
2. $\gamma = (aa|bb)^*$
3. $\gamma = (a|b)^*a(a|b)^*$
4. $\gamma = a^*b^*$
5. $\gamma = (a^*b^*)^*$
6. $\gamma = b^*(\varepsilon|a|aa)b^*$

Wichtiger Hinweis: Für bessere Lesbarkeit gehen wir sparsam mit Klammern um. Analog zur Konvention der *Punkt- vor Strichrechnung* legen wir fest, dass der Stern stärker bindet als die Konkatenation, d. h. $\alpha\beta^* := \alpha(\beta)^*$.

Vorbereitungsaufgabe 2

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ einen möglichst einfachen RE γ mit $L(\gamma) = L$ an.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aabb \text{ ist Präfix von } w\}$
2. $L = \{a^m b^n \mid m \text{ ist gerade und } n \text{ ungerade}\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1 \wedge |w|_b \geq 1\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aba \text{ ist Präfix und Suffix von } w\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aab \text{ ist kein Infix von } w\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ und } |w|_b \text{ sind beide gerade}\}$

Vorbereitungsaufgabe 3

In dieser Aufgabe soll der Beweis vom Satz von Kleene wiederholt weden.

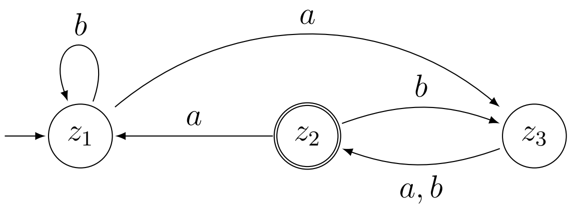
1. Gegeben seien zwei reguläre Grammatiken $G_1 = (\{S_1, T\}, \{a, b\}, P_1, S_1)$ und $G_2 = (\{S_2, U\}, \{a, b\}, P_2, S_2)$ mit Produktionen

$$P_1: \quad S_1 \to aT \mid b \qquad\qquad P_2: \quad S_2 \to bU \mid \varepsilon$$
$$\qquad T \to aS_1 \mid bT \qquad\qquad\qquad U \to aU \mid b$$

   Seien α und β REs mit $L(G_1) = L(\alpha)$ und $L(G_2) = L(\beta)$. Geben Sie eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ für folgende Fälle an.

(a) $L(G) = L(\alpha\beta)$ (b) $L(G) = L((\alpha|\beta))$ (c) $L(G) = L((\alpha)^*)$

2. Verallgemeinern Sie Ihre Konstruktion aus Teil 1 (c) für eine beliebige Grammatik $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$.
3. Geben Sie eine Mengendarstellung von $R^k_{i,j}$ an. Verwenden Sie den in Aufgabenblatt 2, Aufgabe 4 eingeführten Begriff eines *Laufes*.
4. Sei M der folgende DFA:



Bestimmen Sie $\alpha^1_{2,1}$, $\alpha^1_{1,3}$ und $\alpha^1_{3,2}$. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie diese durch kürzere, äquivalente Ausdrücke ersetzen.

Vorbereitungsaufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ definieren wir das gespiegelte (engl. *reversed*) Wort w^R rekursiv wie folgt:

$$w^R = \begin{cases} \varepsilon & \text{für } w = \varepsilon \\ au^R & \text{für } u \in \Sigma^* \text{ und } a \in \Sigma \text{ mit } w = ua. \end{cases}$$

Formal ist also die Wortspiegelung eine Funktion $(\cdot)^R \colon \Sigma^* \to \Sigma^*$.

1. Zeigen Sie $(bac)^R = cab$ durch wiederholtes Anwenden der Definition.
2. Für eine Sprache L über Σ sei

$$L^R = \left\{ w^R \,\middle|\, w \in L \right\}.$$

Gegeben Sie zu jeder der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ eine möglichst einfache Beschreibung an.

(a) $\{\varepsilon, ab, bbab\}^R$

(b) $\emptyset^R$

(c) $(\Sigma^*)^R$

(d) $\{a^m b^n \mid m \leq n\}^R$

(e) $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq |w|_b\}^R$

(f) $\{w \in \Sigma^* \mid abb \text{ ist Präfix von } w\}$

3. Zeigen Sie für alle $u, v \in \Sigma^*$: $(uv)^R = v^R u^R$.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ einen möglichst einfachen RE γ mit $L(\gamma) = L$ an.

Hinweis: Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde bei Teilaufgabe 8 die Bedingung $|w|_a \leq 2$ durch $|w|_a \leq 1$ ersetzt.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aabb \text{ ist Suffix von } w\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid abba \text{ ein Infix von } w\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ ist kein Infix von } w\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der dritte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der drittletzte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 3\}$
7. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq 2 \vee |w|_b \geq 2\}$
8. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq 1 \wedge |w|_b \geq 2\}$
9. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ oder } |w|_b \text{ ist gerade}\}$
10. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 1 \mod 3\}$
11. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \mod 3 \vee |w|_b \equiv 1 \mod 2\}$

Präsenzaufgabe 2

Seien Σ ein Alphabet mit $\varepsilon, \emptyset, |, ^*, (,) \notin \Sigma$ und $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, ^*, (,)\}$. Ein RE über Σ kann als Wort über Γ aufgefasst werden.

Beispiel: Für $\Sigma = \{a, b\}$ ist $(ab)^*(bb|\varepsilon)$ ein RE (der Länge 11) über Σ, aber $(^*a|)|ba$ nicht.

Die Menge aller REs über Σ bezeichnen wir mit $\mathrm{RE}(\Sigma)$.

1. Geben Sie eine Grammatik G mit $L(G) = \mathrm{RE}(\Sigma)$ an.
2. Da REs induktiv definiert sind, gilt für sie das Prinzip der *strukturellen Induktion*: Jedes $\gamma \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ besitzt genau dann eine Eigenschaft $P(\gamma)$, wenn folgende Aussagen gelten:

(1) $P(\emptyset)$	(4) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P(\alpha\beta))$
(2) $P(\varepsilon)$	(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P((\alpha\|\beta)))$
(3) $\forall a \in \Sigma\colon P(a)$	(6) $\forall \alpha \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon (P(\alpha) \implies P((\alpha)^*))$

   (a) Welche Richtung der Äquivalenz ist trivial?

   (b) Zeigen Sie die nichttriviale Richtung der Äquivalenz.

Präsenzaufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet.

1. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A und B über Σ:
   (a) $(AB)^R = B^R A^R$
   (b) $(A \cup B)^R = A^R \cup B^R$
   (c) $(A^*)^R = (A^R)^*$
2. Zeigen Sie: Für eine reguläre Sprache L ist auch $L^R = \left\{ w^R \,\middle|\, w \in L \right\}$ regulär.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Sei L die Menge aller Binärdarstellungen von durch 3 teilbaren Zahlen, d. h.

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w_2 \equiv 0 \mod 3 \} .$$

Geben Sie einen RE γ mit $L(\gamma) = L$ und $|\gamma|_0, |\gamma|_1 \leq 3$ an.

Hinweis: Die Binärdarstellung natürlicher Zahlen wurde in Vorbereitungsaufgabe 3 auf Ergänzungsblatt 5 eingeführt.

Knobelaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{0,1\}^3$ ein 8-elementiges Alphabet bestehend aus allen Tripeln über $\{0,1\}$ und L folgende Sprache über Σ:

$$L = \{ (x_1, y_1, z_1) \dots (x_n, y_n, z_n) \mid n \in \mathbb{N} \wedge (x_1 \dots x_n)_2 + (y_1 \dots y_n)_2 = (z_1 \dots z_n)_2 \} .$$

Beispielsweise enthält L die Wörter $(0,1,1)(1,0,1)$, $(0,0,1)(1,0,0)(1,1,0)$ und ε, aber $(1,1,1)$ und $(0,1,0)(1,1,0)$ nicht.

Geben Sie einen RE γ für L an.

Hinweis: Für die Bedeutung von $(x_1 \dots x_n)_2$, $(y_1 \dots y_n)_2$ und $(z_1 \dots z_n)_2$ siehe Vorbereitungsaufgabe 3 auf Ergänzungsblatt 5.