Ergänzungsblatt 8

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Das Pumping-Lemma besagt, dass jede reguläre Sprache L über einem Alphabet Σ eine gewisse Eigenschaft $P(L)$ besitzt. Intuitiv besagt $P(L)$, dass jedes Wort aus L, das lang genug ist, sich am Anfang des Wortes beliebig auf- und abpumpen lässt, ohne die Sprache zu verlassen.

Formal hat $P(L)$ die Form:

$$\boxed{}\, n \in \mathbb{N}\colon \boxed{}\, x \in L\colon \Big(|x| \geq n \boxed{} \boxed{}\, u, v, w \in \Sigma^*\colon$$
$$\big(x = uvw \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \boxed{} \boxed{}\, i \in \mathbb{N}\colon uv^iw \boxed{} L\big)\Big)$$

1. Füllen Sie die leeren Felder so mit den Symbolen $\exists$, $\forall$, $\Longrightarrow$, $\wedge$, $\in$ und $\notin$ aus, dass die entstehende Aussage äquivalent zur
   (a) Eigenschaft $P(L)$ ist.
   (b) Negation $\neg P(L)$ der Eigenschaft $P(L)$ ist.
2. Kann man etwas über die Regularität einer Sprache L sagen, wenn $P(L)$
   (a) gilt?
   (b) nicht gilt?

Vorbereitungsaufgabe 2

Eine binäre Relation $\sim$ auf einer Menge S heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie (1) *reflexiv*, (2) *symmetrisch* und (3) *transitiv* ist, d. h.:

(1) $\forall x \in S\colon x \sim x$

(2) $\forall x, y \in S\colon (x \sim y \implies y \sim x)$

(3) $\forall x, y, z \in S\colon ((x \sim y \wedge y \sim z) \implies x \sim z)$

Sei Σ ein Alphabet. Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen auf Σ^* und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $x \sim y :\Longleftrightarrow \exists m, n \geq 1\colon x^m = y^n$
2. $x \sim y :\Longleftrightarrow \exists w \in \Sigma^*\colon wx = y^2$

Vorbereitungsaufgabe 3

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S und x ein beliebiges Element aus S, dann heißt $[x]_\sim := \{y \in S \mid x \sim y\}$ die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich $\sim$. Für beliebige $x, y \in S$ gilt dann:

$$x \sim y \iff [x]_\sim = [y]_\sim .$$

Die Menge $S/\!\sim\; := \{[x]_\sim \mid x \in S\}$ aller Äquivalenzklassen heißt *Quotientenmenge* oder *Faktormenge* und bildet eine *Partition* von S, d. h. jedes Element aus S ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Die Mächtigkeit $|S/\!\sim\!|$ der Quotientenmenge wird *Index* von $\sim$ genannt und gelegentlich mit $\mathrm{Index}(\sim)$ notiert.

Eine Menge $R \subseteq S$ heißt *Repräsentanten-* oder *Vertretersystem* von $\sim$, wenn sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält, d. h. wenn $|R \cap [x]_\sim| = 1$ für alle $x \in S$ gilt. Für jedes Repräsentantensystem R von $\sim$ gilt dann:

$$S/\!\sim\; = \{[x]_\sim \mid x \in R\} .$$

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben seien folgende Äquivalenzrelationen auf Σ^*:

1. $x \sim y :\iff |x|_a \equiv |y|_a \mod 3$
2. $x \sim y :\iff |x| = |y|$
3. $x \sim y :\iff |x|_a + |y|_b = |y|_a + |x|_b$

Geben Sie zu jeder Äquivalenzrelation folgendes an:

(a) ein Repräsentantensystem R

(b) die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ von jedem $x \in R$

(c) die Quotientenmenge $\Sigma^*/\!\sim$

(d) der Index $|\Sigma^*/\!\sim\!|$

Vorbereitungsaufgabe 4

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ, $x, y \in \Sigma^*$ zwei beliebige Wörter und R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz. Füllen Sie die leeren Felder so mit den Symbolen $\exists$, $\forall$, $\in$ und $\notin$ aus, dass die entstehende Aussagen wahr sind. Dabei besagt $x \not R_L y$, dass $x R_L y$ nicht gilt, d. h. dass x und y nicht in Relation bezüglich R_L stehen.

1. $x R_L y \iff \boxed{}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{}\, L \iff yw \boxed{}\, L\Big)$
2. $x \not R_L y \iff \boxed{}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{}\, L \iff yw \boxed{}\, L\Big)$

Präsenzaufgaben

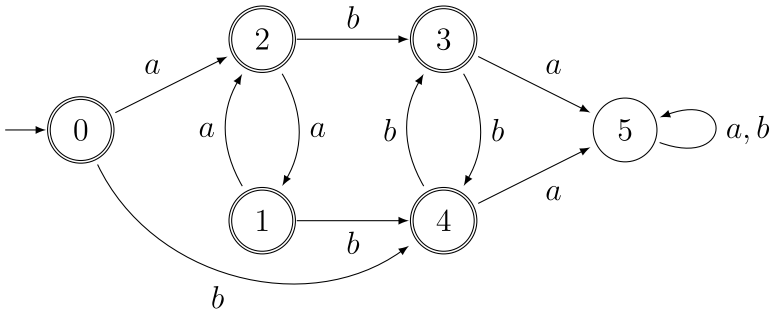
Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass keine der folgenden Sprachen L über dem entsprechenden Alphabet Σ regulär ist.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$
2. $L = \left\{a^{3^k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$, $\Sigma = \{a\}$
3. $L = \left\{a^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} b^\ell c^k \,\middle|\, k, \ell \in \mathbb{N}\right\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

Präsenzaufgabe 2

Sei M der folgende DFA und L die von M akzeptierte Sprache.



1. Geben Sie L an.
2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

   (a) $aab \, R_L \, abb$
   (b) $ab \, R_L \, ba$
   (c) $bab \, R_L \, aba$
   (d) $\varepsilon \, R_L \, bba$
   (e) $\varepsilon \, R_L \, aa$
   (f) $bb \, R_L \, \varepsilon$

3. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Myhill-Nerode-Relation R_L an.
4. Geben Sie den Myhill-Nerode-Automat grafisch an.
5. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Relation R_M an.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

In Präsenzaufgabe 2 aus Ergänzungsblatt 7 haben wir eine kontextfreie Grammatik für die Menge $\mathrm{RE}(\Sigma)$ aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ angegeben. Zeigen Sie, dass $\mathrm{RE}(\Sigma)$ für kein Alphabet Σ regulär ist.

Hinweis: Da Alphabete nichtleer sind, kann von der Existenz eines Buchstaben $a \in \Sigma$ ausgegangen werden.

Knobelaufgabe 2

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf Σ^* mit

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists u, v \in \Sigma^*\colon x = uv \wedge y = vu$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Knobelaufgabe 3

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \left\{ a^k b^\ell \,\middle|\, \operatorname{ggT}(k, \ell) = 1 \right\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht regulär ist.

Hinweis: $\operatorname{ggT}(k, \ell)$ ist der *größte gemeinsame Teiler* von k und ℓ mit $\operatorname{ggT}(k, 0) = k$ und $\operatorname{ggT}(k, 1) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $\operatorname{ggT}(k, \ell) = 1$ besagt also, dass k und ℓ *teilerfremd* sind.