Ergänzungsblatt 9

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ an, welche der darunter stehenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

Erinnerung: Mit R_L bezeichnen wir die Myhill-Nerode-Äquivalenz bezüglich L.

1. $L = \left\{a^k b^\ell c^m \,\middle|\, k, \ell, m \in \mathbb{N}\right\}$

   (a) $abb \; R_L \; b$ (b) $aab \; R_L \; aac$ (c) $abc \; R_L \; \varepsilon$ (d) $ba \; R_L \; cb$

2. $L = \{w \in \Sigma^* \,|\, abc \text{ ist Präfix von } w\} = \{abcu \,|\, u \in \Sigma^*\}$

   (a) $ab \; R_L \; \varepsilon$ (b) $aaa \; R_L \; a$ (c) $abcaa \; R_L \; abc$ (d) $abbc \; R_L \; aabc$

3. $L = \{w \in \Sigma^* \,|\, abc \text{ ist Suffix von } w\} = \{uabc \,|\, u \in \Sigma^*\}$

   (a) $aab \; R_L \; ab$ (b) $baab \; R_L \; abba$ (c) $bbb \; R_L \; ccc$ (d) $ac \; R_L \; a$

4. $L = \{w \in \Sigma^* \,|\, |w|_a \leq 1 \land |w|_b = 1 \land |w|_c \geq 1\}$

   (a) $bca \; R_L \; cab$ (b) $acb \; R_L \; bc$ (c) $bcc \; R_L \; cb$ (d) $bc \; R_L \; ab$

5. $L = \{w \in \Sigma^* \,|\, |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

   (a) $abc \; R_L \; cba$ (b) $aac \; R_L \; abcc$ (c) $\varepsilon \; R_L \; aa$ (d) $bbc \; R_L \; abbbcc$

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $\sim, \approx$ Äquivalenzrelationen auf einer Menge S. $\approx$ heißt *Verfeinerung* von $\sim$, falls:

$$\forall x, y \in S \colon (x \approx y \implies x \sim y).$$

In diesem Fall ist jede Äquivalenzklasse bezüglich $\approx$ vollständig in einer Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ enthalten und es gilt folglich $|S/{\sim}| \leq |S/{\approx}|$.

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $\sim, \approx$ Äquivalenzrelationen auf Σ^* mit

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff |x| = |y| \\ x \approx y &\iff (|x|_a = |y|_a \wedge |x|_b = |y|_b). \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, das $\approx$ eine Verfeinerung von $\sim$ ist.
2. Listen Sie alle Elemente von $[aab]_\sim$ auf.
3. Welche Äquivalenzklassen bezüglich $\approx$ enthält $[aab]_\sim$?

Vorbereitungsaufgabe 3

Ein Tupel $(S, \circ)$ bestehend aus einer Menge S und einer binären Verknüpfung $\circ \colon S \times S \to S$ nennen wir *Magma*. Ein Magma $(S, \circ)$ heißt

- *Halbgruppe*, falls $(S, \circ)$ ein Magma ist und $\circ$ assoziativ ist, d. h.:

  $$\forall x, y, z \in S \colon (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

- *Monoid*, falls $(S, \circ)$ eine Halbgruppe ist und ein neutrales Element existiert, d. h.:

  $$\exists e \in S \colon \forall x \in S \colon x \circ e = x = e \circ x.$$

  Das neutrale Element e ist dann eindeutig und wird oft mit 1 notiert.

- *Gruppe*, falls $(S, \circ)$ ein Monoid ist und jedes Element ein Inverses hat, d. h.:

  $$\forall x \in S \colon \exists y \in S \colon x \circ y = 1 = y \circ x.$$

  Das Inverse y zu x ist dann eindeutig und wird oft mit x^{-1} notiert.

Ein Tupel $(S, \circ)$ heißt *kommutativ*, falls gilt:

$$\forall x, y \in S \colon x \circ y = y \circ x.$$

Wie so oft in der Mathematik verwenden wir häufig ein einziges Symbol für verschiedene Verknüpfungen. Beispielsweise wird $\cdot$ für die Multiplikation auf den natürlichen, ganzen, rationalen, reellen oder komplexen Zahlen, aber auch die Konkatenation von Wörtern ($u \cdot v = uv$) verwendet.

Falls klar ist, um welche Verknüpfung $\circ$ es geht, identifizieren wir ein Magma $(S, \circ)$ mit seiner Trägermenge S. Man schreibt dann S und meint dabei $(S, \circ)$. In der Vorlesung wurde beispielsweise Σ^* als das freie Monoid vorgestellt, obwohl eigentlich $(\Sigma^*, \cdot)$ gemeint war. Des Weiteren schreibt man oft xy statt $x \circ y$.

1. Welche der folgenden Tupel sind Magmen/Halbgruppen/Monoide/Gruppen? Welche davon sind kommutativ?

(a) $(\mathbb{N}, +)$	(d) $(\mathbb{N}, \min)$	(g) $(\mathbb{Q}, \cdot)$	(j) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$
(b) $(\mathbb{N}, -)$	(e) $(\mathbb{Z}, +)$	(h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$	(k) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup)$
(c) $(\mathbb{N}, \max)$	(f) $(\mathbb{Z}, -)$	(i) $(\{a, b\}^*, \cdot)$	(l) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \setminus)$

2. Sei $(S, \circ)$ eine endliche Halbgruppe mit $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ als Trägermenge und der rechtsstehenden Verknüpfungstafel für $\circ$.
   (a) Ist $(S, \circ)$ ein Monoid?
   (b) Ist $(S, \circ)$ eine Gruppe?
   (c) Ist $(S, \circ)$ kommutativ?
   Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f	d	c	a	b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a	b	e	f	d
f	b	c	a	f	d	e

Vorbereitungsaufgabe 4

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ heißt *Kongruenzrelation* auf ein Monoid $(S, \circ)$, wenn gilt:

$$\forall x, x', y, y' \in S\colon (x \sim x' \wedge y \sim y') \implies x \circ y \sim x' \circ y'.$$

Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(S, \circ)$, dann ist $\bullet$ mit

$$[x]_\sim \bullet [y]_\sim = [x \circ y]_\sim$$

eine wohldefinierte Verknüpfung, die zusammen mit $S/{\sim}$ ein Monoid bildet, das sogenannte *Quotientenmonoid* $(S/{\sim}, \bullet)$. Wohldefiniert heißt in diesem Fall, dass das Ergebnis der Verknüpfung $[x]_\sim \bullet [y]_\sim$ nicht von der konkreten Wahl der Repräsentanten x und y abhängt.

Sei $\sim$ eine Relation auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x^2 = y^2$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass $\sim$ keine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

Bemerkungen:

- Oft verwendet man dasselbe Symbol für $\circ$ und $\bullet$, obwohl das formal zwei verschiedene Verknüpfungen sind.
- Kongruenzrelationen können auch für Magmen, Halbgruppen und Gruppen definiert werden. Die entstehende Struktur $(S/{\sim}, \bullet)$ wird dann entsprechend *Quotientenmagma*, *-halbgruppe* oder *-gruppe* genannt.

Präsenzaufgaben

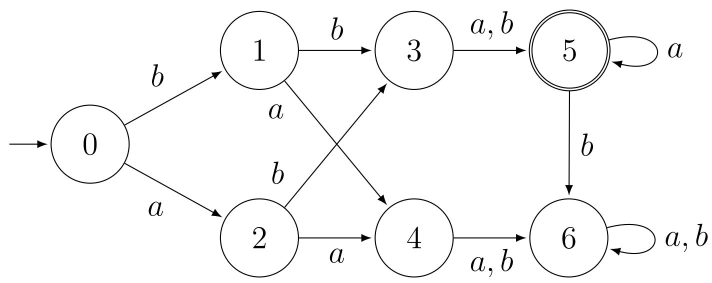
Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Myhill-Nerode, dass keine der folgenden Sprachen L über dem entsprechenden Alphabet Σ regulär ist.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$
2. $L = \left\{a^{3^k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$, $\Sigma = \{a\}$
3. $L = \left\{a^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} b^\ell c^k \,\middle|\, k, \ell \in \mathbb{N}\right\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

Präsenzaufgabe 2

Sei M der folgende DFA:



1. Führen Sie Minimierungsalgorithmus aus der Vorlesung durch.

   Anstatt nicht äquivalente Zustände (bezüglich der Myhill-Nerode-Äquivalenz R_L) zu markieren, soll ein Zeuge eingetragen werden, der die Inäquivalenz der Zustände belegt.

   Ein Wort $w \in \Sigma^*$ heißt *Zeuge* für die Inäquivalenz von p und q, falls gilt:

   $$\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \notin F.$$

   Tragen Sie in jedes Feld einen Zeugen minimaler Länge ein oder schreiben Sie „R_L“, falls die Zustände äquivalent sind.
2. Wie sieht der resultierende minimale DFA aus?
3. Geben Sie einen regulären Audruck γ mit $L(\gamma) = T(M)$ an.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Zeigen Sie mit dem Satz von Myhill-Nerode, dass die Sprache

$$L = \left\{a^k b^\ell \,\middle|\, \mathrm{ggT}(k, \ell) = 1\right\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht regulär ist.

Hinweis: $\mathrm{ggT}(k, \ell)$ ist der *größte gemeinsame Teiler* von k und ℓ mit $\mathrm{ggT}(k, 0) = k$ und $\mathrm{ggT}(k, 1) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $\mathrm{ggT}(k, \ell) = 1$ besagt also, dass k und ℓ *teilerfremd* sind.

Knobelaufgabe 2

Sei Σ ein Alphabet. In früheren Knobelaufgaben (Ergänzungblätter 3 und 8) sollten Sie zeigen, dass folgende Relationen Äquivalenzrelationen auf Σ^* sind:

1. $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists u \in \Sigma^* \colon xu = uy$
2. $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists u, v \in \Sigma^* \colon x = uv \wedge y = vu$

Welche davon sind Kongruenzrelationen auf $(\Sigma^*, \cdot)$?

Beweisen Sie Ihre Antworten.