Ergänzungsblatt 10

Vorbereitungsaufgaben

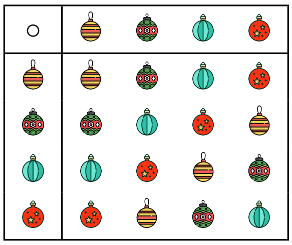
Vorbereitungsaufgabe 1

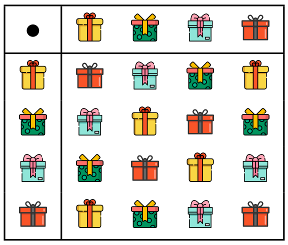
Seien $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ zwei Monoide mit neutralen Elementen 1_M und 1_N. Eine Funktion $\varphi\colon M \to N$ heißt *Monoid-Homomorphismus* von $(M, \circ)$ auf $(N, \bullet)$, wenn gilt:

$$\varphi(1_M) = 1_N \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in M\colon \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y).$$

Wenn klar ist, dass es sich bei $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ um Monoide handelt, nennen wir φ auch einfach *Homomorphismus*.

1. Seien $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ zwei Monoide mit $M = \{$, , , $\}$, $N = \{$, , , $\}$ und folgenden Verknüpfungstafeln:

   Es existiert genau ein Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ mit $\varphi($$) =$ . Geben Sie diesen an.

   Tipp: Was wissen wir über $\varphi($ $\circ$ $)$, $\varphi($ $\circ$ $)$ und $\varphi($ $\circ$ $)$?

2. Geben Sie einen Homomorphismus ψ von $(\mathbb{N}, +)$ auf $(\mathbb{N}, \cdot)$ an.

3. Geben Sie einen Homomorphismus χ von $(\{$, $\}^*, \cdot)$ auf $(\mathbb{N}, +)$ an.

4. Seien $(A, \circ_A)$, $(B, \circ_B)$ und $(C, \circ_C)$ drei Monoide und $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ zwei Homomorphismen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\chi\colon A \to C$ mit $\chi(x) = \psi(\varphi(x))$ wieder ein Homomorphismus ist.

   Bemerkung: Man schreibt dann $\chi = \psi \circ \varphi$ („ψ nach φ“) und nennt χ die *Komposition* von φ und ψ.

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{\text{🎄}, \text{⛄}, \text{🍪}\}$ und $\Gamma = \{\text{🎅}, \text{🦌}\}$ zwei Alphabete und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus vom freien Monoid $(\Sigma^*, \cdot)$ auf das freie Monoid $(\Gamma^*, \cdot)$, der durch $\varphi(\text{🎄}) = \text{🦌}$, $\varphi(\text{⛄}) = \text{🎅🎅🦌}$ und $\varphi(\text{🍪}) = \text{🦌🎅🎅}$ definiert ist.

Hinweis: Ist Σ ein Alphabet und $\varphi\colon \Sigma^* \to M$ ein Homomorphismus vom freien Monoid $(\Sigma^*, \cdot)$ in ein beliebiges Monoid $(M, \circ)$, dann wird φ durch die Bilder der Werte aus Σ eindeutig bestimmt. Dann gilt nämlich für alle $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$:

$$\varphi(a_1 \ldots a_n) = \varphi(a_1) \circ \ldots \circ \varphi(a_n).$$

Aus diesem Grund kann φ durch Angabe der Werte $\varphi(\text{🎄})$, $\varphi(\text{⛄})$ und $\varphi(\text{🍪})$ eindeutig definiert werden.

1. Bestimmen Sie:

   (a) $\varphi(\text{⛄🎄🍪})$

   (b) $\varphi(\varepsilon)$

   (c) $\varphi(\{\text{🎄}^n \text{⛄}^n \text{🍪}^n \mid n \in \mathbb{N}\})$

   (d) $\varphi^{-1}(\text{🦌🎅🎅🦌🎅🎅🦌})$

   (e) $\varphi^{-1}(\text{🎅🦌🎅})$

   (f) $\varphi^{-1}(\{w \in \Gamma^* \mid |w|_{\text{🎅}} = |w|_{\text{🦌}}\})$

2. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Gilt $\varphi(\{\text{⛄}, \text{🍪}\}^*) = \{w \in \Gamma^* \mid |w|_{\text{🎅}} = 2|w|_{\text{🦌}}\}$?

   (b) Ist $\varphi(L)$ für jede reguläre Sprache L über dem Alphabet Σ regulär?

Erinnerung: Für eine Funktion $f\colon A \to B$ und Mengen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ gilt

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(B') = \{x \mid f(x) \in B'\}.$$

Man nennt $f(A')$ das *Bild* von A' unter f und $f^{-1}(B')$ das *Urbild* von B' unter f. Hierbei sollte f^{-1} nicht mit der Umkehrfunktion einer Funktion f verwechselt werden. Diese wird zwar auch mit f^{-1} notiert, existiert jedoch nur, falls f bijektiv ist. Für jedes $y \in B$ gilt $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$.

Vorbereitungsaufgabe 3

Seien $\Sigma = \{\text{🎄}, \text{⛄}\}$ ein Alphabet und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion mit $\varphi(w) = \text{🎄}^{|w|_{\text{🎄}}} \text{⛄}^{|w|_{\text{⛄}}}$.

1. Bestimmen Sie:

   (a) $\varphi(\text{🎄⛄⛄🎄⛄})$

   (b) $\varphi(\text{🎄}^{15} \text{⛄}^{20} \text{🎄}^{25} \text{⛄}^{30})$

   (c) $\varphi(\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\text{🎄}} = |w|_{\text{⛄}}\})$

   (d) $\varphi^{-1}(\text{🎄🎄🎄⛄})$

   (e) $\varphi^{-1}(\text{⛄🎄})$

   (f) $\varphi^{-1}(\{\text{🎄}^m \text{⛄}^n \mid m, n \in \mathbb{N}\})$

2. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Ist φ ein Homomorphismus?

   (b) Ist $\varphi(L)$ für jede reguläre Sprache L über dem Alphabet Σ regulär?

Präsenzaufgabe 1

Seien $(\Sigma^*, \cdot)$ das freie Monoid über dem Alphabet $\Sigma = \{🎄, ⛄, 🍪\}$ mit der Konkatenation von Wörtern als Verknüpfung und $(M, \cdot)$ ein Monoid mit der Trägermenge $M = \{-1, 0, 1\}$ und der gewöhnlichen Multiplikation auf Zahlen als Verknüpfung.

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to M$, der durch $\varphi(🎄) = -1$, $\varphi(⛄) = 0$ und $\varphi(🍪) = 1$ eindeutig definiert ist.

1. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $(M, \cdot)$ an. Warum ist $(M, \cdot)$ ein Monoid? Ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe?
2. Geben Sie eine Formel für $\varphi(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ an.
3. Welche Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ werden von $(M, \cdot)$ mit φ erkannt?

Präsenzaufgabe 2

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ, R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz bezüglich L und $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz bezüglich L. Bekanntlich sind R_L und $\equiv_L$ Äquivalenzrelationen.

1. Für diese Teilaufgabe seien $\Sigma = \{🎄, ⛄\}$ und $L = \{🎄^m ⛄^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Geben Sie Quotientenmenge und Index von $\equiv_L$ sowie die Verknüpfungstafel des syntaktischen Monoids $(\mathrm{Synt}(L), \cdot)$ an.
   (b) Zeigen Sie, dass R_L im Allgemeinen keine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\equiv_L$ eine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.
3. Warum ist die auf Folie 17.5 definierte Funktion $\varphi\colon \Sigma^* \to \mathrm{Synt}(L)$ mit $\varphi(w) = [w]_{\equiv_L}$ ein Monoid-Homomorphismus?

Erinnerung: $\mathrm{Synt}(L) = \Sigma^*/{\equiv_L}$.

Präsenzaufgabe 3

Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache regulär ist.

Präsenzaufgabe 4

Zeigen Sie mithilfe der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, dass folgende Sprachen nicht regulär sind.

1. $A = \{w \in \{🎄, ⛄\}^* \mid |w|_{🎄} = |w|_{⛄}\}$
2. $B = \left\{w \in \{🎄, ⛄, 🍪\}^* \,\middle|\, |w|_{🎄} = |w|_{⛄} = |w|_{🍪}\right\}$
3. $C = \left\{🎄^k ⛄^\ell 🍪^m \,\middle|\, k = 0 \lor \ell = m\right\}$

Verwenden Sie insbesondere weder das Pumping-Lemma noch den Satz von Myhill-Nerode. Sie dürfen jedoch verwenden, dass $L = \{🎄^n ⛄^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \circ)$ bildet mit

$$x \circ y := 2x + 2y + xy + 2$$

ein kommutatives Monoid, aber keine Gruppe.

Knobelaufgabe 2

Aus Präsenzaufgabe 2 wissen wir, dass das syntaktische Monoid für die Sprache

$$L = \{🎄^m ⛄^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{🎄, ⛄\}$ weder eine Gruppe noch kommutativ ist. Geben Sie jeweils eine Sprache L mit den geforderten Eigenschaften an.

1. $\mathrm{Synt}(L)$ ist kommutativ, aber keine Gruppe.
2. $\mathrm{Synt}(L)$ ist eine nicht kommutative Gruppe.
3. $\mathrm{Synt}(L)$ ist eine kommutative Gruppe.

Knobelaufgabe 3

Welche der folgenden Sprachen sind für jedes Alphabet Σ und jede reguläre Sprache L über Σ regulär?

1. $A = \{ww \mid w \in L\}$
2. $B = \{w \mid ww \in L\}$

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Knobelaufgabe 4

Seien $\Sigma = \{🎄, ⛄\}$ und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $\varphi(w) = 🎄^{|w|_{🎄}} ⛄^{|w|_{⛄}}$ die Funktion aus Vorbereitungsaufgabe 3. Zeigen Sie oder widerlegen Sie: Für jede reguläre Sprache L über Σ ist $\varphi^{-1}(L)$ regulär.