



# Ergänzungsblatt 11

---

## Vorbereitungsaufgaben

---

### Vorbereitungsaufgabe 1

Sei  $G = (\{S, A, B, C, D, E, F, G\}, \{a, b\}, P, S)$  eine Grammatik mit Produktionen

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow B \mid C \mid GaCB & D \rightarrow aCb \mid ba \mid G \\ A \rightarrow a \mid E & E \rightarrow A \mid F \\ B \rightarrow AD \mid F & F \rightarrow b \mid A \\ C \rightarrow a \mid A & G \rightarrow CE \mid D. \end{array}$$

Wandeln Sie  $G$  in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform um.

### Vorbereitungsaufgabe 2

Sei  $G = (\{A_1, A_2, A_3\}, \{a, b, c\}, P, A_1)$  eine kontextfreie Grammatik mit Produktionen

$$\begin{array}{l} A_1 \rightarrow A_2a \mid b \\ A_2 \rightarrow A_3A_3 \\ A_3 \rightarrow A_1c, \end{array}$$

bei der wir die Variablen der Einfachheit halber schon von  $A_1$  bis  $A_3$  durchnummeriert haben.

Wandeln Sie  $G$  in eine Grammatik  $G'$  in Greibach-Normalform um.

### Vorbereitungsaufgabe 3

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache

$$L = \{a^k b^\ell c^m \mid k < \ell < m\}$$

über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  nicht kontextfrei ist.

### Vorbereitungsaufgabe 4

Seien  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine Grammatik in Chomsky-Normalform und  $w = a_1 \dots a_n$  ein Wort mit  $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ . Wir betrachten die vom CYK-Algorithmus verwendeten Mengen  $T_{i,j}$ , wenn dieser auf  $G$  und  $w$  gestartet wird.

Geben Sie für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n - i + 1$  eine möglichst einfache Definition von  $T_{i,j}$  an.

## Vorbereitungsaufgabe 5

Spielen Sie ein bisschen mit folgender Webseite herum:

[www.xarg.org/tools/cyk-algorithm](http://www.xarg.org/tools/cyk-algorithm)

---

## Präsenzaufgaben

---

### Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1.  $L = \{a^k b^\ell \mid k < \ell\}$  über  $\Sigma = \{a, b\}$
2.  $L = \{a^k b^\ell c^m \mid k + \ell = m\}$  über  $\Sigma = \{a, b, c\}$
3.  $L = \{a^k b^\ell c^k d^\ell \mid k, \ell \geq 0\}$  über  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
4.  $L = \{a^k b^\ell c^m d^n \mid k + m = \ell + n\}$  über  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
5.  $L = \{a^{k\ell} \mid k, \ell \geq 0\}$  über  $\Sigma = \{a\}$
6.  $L = \{a^{k\ell} \mid k, \ell \geq 2\}$  über  $\Sigma = \{a\}$

### Präsenzaufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Sprachen  $A$  und  $B$  richtig und welche falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn  $A \cap B$  kontextfrei ist, dann sind auch  $A$  und  $B$  kontextfrei.
2. Wenn  $A^*$  kontextfrei ist, dann ist auch  $A$  kontextfrei.
3. Wenn  $A \subseteq B$  gilt und  $B$  kontextfrei ist, dann ist auch  $A$  kontextfrei.
4. Wenn  $A \cup B$  kontextfrei ist, dann sind  $A$  und  $B$  kontextfrei.
5. Wenn  $A \subseteq B$  gilt und  $A$  kontextfrei ist, dann ist auch  $B$  kontextfrei.
6. Wenn  $AB$  kontextfrei ist, dann sind auch  $A$  und  $B$  kontextfrei.

### Präsenzaufgabe 3

Seien  $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$  eine Grammatik mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow BA \mid CA \mid b, \\ A &\rightarrow BA \mid a, \\ B &\rightarrow CC \mid b, \\ C &\rightarrow AB \mid a. \end{aligned}$$

und  $w = abba$  ein Wort.

1. Führen Sie den CYK-Algorithmus auf  $G$  und  $w$  aus.
2. Warum gilt  $w \in L(G)$ ?
3. Geben Sie einen Syntaxbaum für  $w$  in  $G$  an.
4. Welche Infixe von  $w$  sind in  $L$  enthalten?

## Knobelaufgaben

### Knobelaufgabe 1

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet. Für Wörter  $v, x \in \Sigma^*$  sei  $|x|_v$  die Anzahl der Vorkommnisse von  $v$  in  $x$ . Formal:

$$|x|_v := |\{(u, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid x = uvw\}|.$$

Beispielsweise gilt  $|abababa|_{aba} = 3$  und  $|bbbbbb|_{bb} = 4$ .

Aus Präsenzaufgabe 4 von Ergänzungsblatt 10 wissen wir, dass die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

nicht regulär ist.

Was kann über die Regularität der folgenden zwei Sprachen gesagt werden?

1.  $A = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$
2.  $B = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{aba} = |w|_{bab}\}$

### Knobelaufgabe 2

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1.  $L_1 = \{a^{k^2+100} \mid k \in \mathbb{N}\}$  über  $\Sigma = \{a\}$
2.  $L_2 = \{a^{k^2+\ell} \mid k, \ell \in \mathbb{N}\}$  über  $\Sigma = \{a\}$