Universität Stuttgart

Ergänzungen zu Theoretische Informatik I
Wintersemester 2019
Carlos Camino

Ergänzungsblatt 12

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Seien Σ und Γ zwei Alphabete, $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus, A eine Sprache über Σ und B eine Sprache über Γ. Aus Aufgabe 4 von Blatt 3 und Aufgabe 4 von Blatt 5 kennen wir folgende Abschlusseigenschaften:

$$A \text{ regulär} \implies \varphi(A) \text{ regulär} \qquad \text{und} \qquad B \text{ regulär} \implies \varphi^{-1}(B) \text{ regulär.}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrungen:

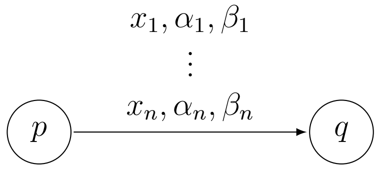
1. $\varphi(A)$ regulär $\implies$ A regulär
2. $\varphi^{-1}(B)$ regulär $\implies$ B regulär

Vorbereitungsaufgabe 2

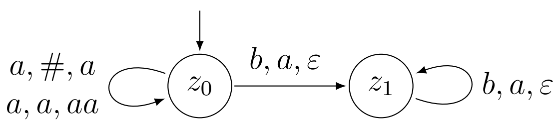
Sei $M = (\{0,1\}, \{a,b,c\}, \{\#\}, \delta, 0, \#)$ ein PDA mit

$$\begin{aligned}
&\delta(0,\varepsilon,\#) = \{(1,\#)\} && \delta(1,\varepsilon,\#) = \emptyset \\
&\delta(0,a,\#) = \{(0,\#)\} && \delta(1,a,\#) = \{(1,\#)\} \\
&\delta(0,b,\#) = \{(0,\varepsilon)\} && \delta(1,b,\#) = \{(1,\#)\} \\
&\delta(0,c,\#) = \emptyset && \delta(1,c,\#) = \{(0,\#\#),(1,\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

1. Stellen Sie M grafisch dar. Verwenden Sie die übliche grafische Darstellung von Automaten mit Übergängen der Form



für $(q,\beta_1) \in \delta(p,x_1,\alpha_1), \ldots, (q,\beta_n) \in \delta(p,x_n,\alpha_n)$. Beispielsweise kann der PDA für die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ aus Vorlesungsfolie 30.4 wie folgt dargestellt werden:



Hinweis: Für das Format der Kantenbeschriftungen gibt es keinen Standard in der Literatur. Es variiert von Autor zu Autor. Statt x_i, α_i, β_i sind beispielsweise

$$x_i\,(\alpha_i \to \beta_i) \qquad\qquad x_i, \alpha_i/\beta_i \qquad\qquad (x_i, \alpha_i) \to \beta_i$$

ebenfalls gängige und bei uns zulässige Schreibweisen. Man beachte, dass die Reihenfolge der drei Komponenten bei allen vier Formaten dieselbe ist.

2. Der *Konfigurationsgraph* eines PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ auf einem Wort $w \in \Sigma^*$ ist der Graph der Einschränkung der Konfigurationsübergangsrelation $\vdash$ auf der Menge $\{C \mid (s, w, \#) \vdash^* C\}$ aller von der Startkonfiguration $(s, w, \#)$ erreichbaren Konfigurationen.

   Geben Sie den Konfigurationsgraphen von M auf $w = abc$ grafisch an. Vervollständigen Sie hierzu das folgende Bild:

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots & \\
 & (0, bc, \#) \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & \\
(0, abc, \#) \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & (1, bc, \#) \arrow[r, mapsto] & \cdots \\
 & (1, abc, \#) \arrow[ur, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

3. Gilt $w \in N(M)$?

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet.

1. Geben Sie grafisch einen PDA M_1 mit $N(M_1) = \{uav \mid u, v \in \Sigma^* \wedge |u| = |v|\}$
2. Geben Sie grafisch einen PDA M_2 mit $N(M_2) = \left\{a^{|w|}w \;\middle|\; w \in \Sigma^*\right\}$
3. Überprüfen Sie, dass $aabc$ von M_2 akzeptiert wird, aber nicht von M_1.

Präsenzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und $L = \left\{a^k b^\ell c^m \;\middle|\; k + \ell = m\right\}$ eine Sprache über Σ.

1. Geben Sie eine Typ-2-Grammatik G mit $L(G) = L$ an. Ihre Grammatik darf höchstens 7 Produktionsregeln besitzen und soll die ε-Sonderregel einhalten.
2. Geben Sie den PDA M mit $N(M) = L(G)$ aus Vorlesungsfolie 31.2 grafisch an.

Präsenzaufgabe 3

Ein *PDA mit Endzuständen* M ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$, sodass $F \subseteq Q$ gilt und $M' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ ein PDA ist. Die von M akzeptierte Sprache ist

$$N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists f \in F, X \in \Gamma^* \colon (s, w, \#) \vdash^* (f, \varepsilon, X)\},$$

wobei $\vdash$ die Konfigurationsübergangsrelation von M' ist.

1. Geben Sie einen PDA mit Endzuständen M für die Sprache

   $$L = \left\{a^k b^\ell c^m \,\middle|\, k \in \{\ell, m\}\right\}$$

   an. Wie üblich können Endzustände grafisch durch Doppelkreise dargestellt werden.

2. Aus der Vorlesung wissen wir, dass PDAs und PDAs mit Endzuständen genau dieselben Sprachen akzeptieren.

   (a) Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$ ein PDA mit Endzuständen. Geben Sie einen zu M äquivalenten PDA M' an.

   (b) Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ ein PDA. Geben Sie einen zu M äquivalenten PDA mit Endzuständen M' an.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Zeigen Sie die Korrektheit der beiden Konstruktionen aus Präsenzaufgabe 3, Teil 2.

Knobelaufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Geben Sie eine grobe Beweisskizze für jede Ihrer Antworten an.

Hinweis: Zwei PDAs heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Sprache akzeptieren.

1. Für jeden PDA, der nicht das leere Wort akzeptiert, gibt es einen äquivalenten PDA ohne ε-Übergänge.

2. Für jeden PDA gibt es einen äquivalenten PDA mit nur zwei Kellersymbolen.

3. Für jeden PDA gibt es einen äquivalenten PDA, für den ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass dieser nie mehr als k Symbole auf dem Keller hat.