Lösungsblatt 1

Hinweis: Alle Informationen und Materialien zur Veranstaltung sind zu finden unter

`www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/w19/eti1`.

Vorbereitungsaufgaben

Keine Vorbereitungsaufgaben.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

1. (a) $\{1,3\} \in \{1,2,3\}$
   (b) $\{1\} \in \{\{1\},\{2\}\}$
   (c) $\emptyset \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
   (d) $\emptyset \in \{1,2,3\}$
   (e) $2 \in \{1,\{1,2\},\{\{2\}\}\}$
   (f) $\{1,2\} \in \{1,\{1,2\},\{\{2\}\}\}$
2. (a) $1 \subseteq \{1,2,3\}$
   (b) $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$
   (c) $\{1\} \subseteq \{\{1\},\{2\}\}$
   (d) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
   (e) $\{1,2,2\} = \{1,1,1,2\}$
   (f) $\{1,2,3\} = \{3,1,2\}$

Lösung

1. (a) falsch
   (b) wahr
   (c) wahr
   (d) falsch
   (e) falsch
   (f) wahr
2. (a) falsch
   (b) wahr
   (c) falsch
   (d) wahr
   (e) wahr
   (f) wahr

Präsenzaufgabe 2

1. Geben Sie folgende Mengen intensional an.
   (a) Die Menge $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$ aller Quadratzahlen.
   (b) Die Menge $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$ aller Zweierpotenzen.
   (c) Die Menge $C = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ aller ungeraden Zahlen.
2. Geben Sie folgende Mengen extensional an.
   (a) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n < 6\}$
   (b) $E = \{n + 5 \mid n \in [4]\}$
   (c) $F = \{|n - 4| \mid n \in \mathbb{N} \land 1 \leq n \leq 7\}$

Lösung

1. (a) $A = \{n \mid \exists m \in \mathbb{N}\colon n = m^2\} = \{m^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$
   (b) $B = \{n \mid \exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2^m\} = \{2^m \mid m \in \mathbb{N}\}$
   (c) $C = \{n \mid \exists m \in \mathbb{Z}\colon n = 2m + 1\} = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$
2. (a) $D = \{3, 4, 5\}$
   (b) $E = \{1 + 5, 2 + 5, 3 + 5, 4 + 5\} = \{6, 7, 8, 9\}$
   (c) $F = \{|-3|, |-2|, |-1|, |0|, |1|, |2|, |3|\} = \{3, 2, 1, 0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$

Präsenzaufgabe 3

Geben Sie folgende Mengen extensional an.

1. $A = \{a, ab\}^2$
2. $B = \{a, b\}^3$
3. $C = \{uv \mid u \in \{a, ab\} \land v \in \{b, bb\}\}$
4. $D = \{v \mid \text{es gibt Wörter } u, w \text{ mit } uvw = abc\}$

Lösung

1. Gesucht ist die extensionale Schreibweise der Menge $A = \{a, ab\} \times \{a, ab\}$. Da ab bereits ein Wort (und somit ein Tupel) ist, enthält A verschachtelte Tupel, wie z. B. (a, ab). Diese Schreiben wir nicht als Wörter, da man z. B. aab als (a, a, b) und nicht als (a, ab) interpretieren würde.

   Wir erhalten: $A = \{(a, a), (a, ab), (ab, a), (ab, ab)\}$.

2. Gesucht ist die extendionale Schreibweise der Menge $B = \{a, b\} \times \{a, b\} \times \{a, b\}$. Da B keine verschachtelte Tupel enthält, können die Elemente von B sowohl als Tupel, als auch als Wörter geschrieben werden.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}B &= \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}\\ &= \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}.\end{aligned}$$

3. Die Menge C enthält alle Konkatenationen der Elemente aus $\{a, ab\}$ mit denen aus $\{b, bb\}$. Insbesondere ist C nicht zu verwechseln mit $\{a, ab\} \times \{b, bb\}$.

   Wir erhalten:
   $$C = \{ab, abb, abb, abbb\} = \{ab, abb, abbb\}.$$

4. Die Menge D enthält alle Teilsequenzen von abc:
   $$D = \{\varepsilon, a, b, c, ab, bc, abc\}.$$

Präsenzaufgabe 4

1. Geben Sie zu jeder der folgenden homogenen binären Relationen die entsprechende reflexive transitive Hülle an.
   (a) $R = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,4)\}$ über $[4]$
   (b) $S = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\mathbb{N}$
   (c) $T = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \leq n\}$ über $\mathbb{Z}$
2. Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Wir betrachten die homogene binäre Relation
   $$\rightsquigarrow\, = \{(uvw, uvvw) \mid u, v, w \in \Sigma^*\}$$
   über Σ^*. In dieser Aufgabe schreiben wir $x \rightsquigarrow y$ (Infixnotation) statt $(x,y) \in \rightsquigarrow$.
   (a) Welche Bedingung müssen Wörter $x, y \in \Sigma^*$ erfüllen, damit $x \rightsquigarrow y$ gilt?
   (b) Welche der folgenden Aussagen gelten und welche nicht?

   i. $aba \rightsquigarrow abba$ iii. $ab \rightsquigarrow ab$ v. $abc \rightsquigarrow abbbbc$
   ii. $ac \rightsquigarrow abc$ iv. $aba \rightsquigarrow ababa$ vi. $abc \rightsquigarrow^* abbbbc$

   Hierbei bezeichnet $\rightsquigarrow^*$ die reflexive transitive Hülle von $\rightsquigarrow$.

Lösung

1. (a) $R^* = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
   (b) $S^* = \{(n, n+k) \mid k, n \in \mathbb{N}\} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \leq n\}$
   (c) $T^* = T$
2. (a) Es müssen Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $x = uvw$ und $y = uvvw$ existieren.
   (b)

i. $aba \rightsquigarrow abba$

ii. $ac \not\rightsquigarrow abc$

iii. $ab \rightsquigarrow ab$

iv. $aba \rightsquigarrow ababa$

v. $abc \not\rightsquigarrow abbbbc$

vi. $abc \rightsquigarrow^* abbbbc$

Präsenzaufgabe 5

Geben Sie folgende Mengen als Auflistung aller Elemente an.

1. $A = \{2k \mid k \in [4]\}$
2. $B = \{k \mid 2k \in [4]\}$
3. $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n-5| \leq 2\}$
4. $D = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m \leq n \leq m+4\}$
5. $E = \{vu \mid uv = abcd\}$

Lösung

1. $A = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4\} = \{2, 4, 6, 8\}$
2. $B = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\} = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$
3. $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
4. $D = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$
5. $E = \{abcd, bcda, cdab, dabc\}$

Präsenzaufgabe 6

Geben Sie eine Mengendarstellung für die Menge

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$$

aller Primzahlen an.

Lösung

Eine natürliche Zahl n heißt prim, wenn sie genau zwei natürliche Teiler besitzt, d. h.:

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N}_2 \colon p \neq mn\}\,.$$

Selbstverständlich ist das nicht die einzige mögliche Lösung zu dieser Aufgabe. Obwohl weniger formal, ist eine Lösung der Form

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ besitzt genau zwei natürliche Teiler}\}$$

ebenfalls korrekt.

Hinweis: Die Zahl 0 besitzt unendlich viele Teiler, da 0 restlos durch jede natürliche Zahl geteilt werden kann. Die Zahl 1 besitzt nur einen Teiler, nämlich 1 selbst. Somit ist 2 die kleinste Primzahl.

Präsenzaufgabe 7

Geben Sie zu jeder der folgenden homogenen binären Relationen die entsprechende reflexive transitive Hülle an.

1. $R = \{(1,2),(2,1),(2,3),(4,3)\}$ über $[4]$
2. $T = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z} \wedge m < n\}$ über $\mathbb{Z}$
3. $U = \{(u,uv) \mid u,v \in \{a,b\}^*\}$ über $\{a,b\}^*$

Lösung

1. $R^* = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}$
2. $S^* = \{(n, n+5k) \mid k,n \in \mathbb{N}\}$
3. $T^* = T$
4. $U^* = U$

Knobelaufgaben

Keine Knobelaufgaben.