Lösungsblatt 3

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B, C und D:

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \implies AC \subseteq BD.$$

Lösung

Beweisstruktur

Angenommen, es gilt $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$. Sei $w \in AC$ beliebig.

$\rightsquigarrow$ $w = uv$ für Wörter $u \in A$ und $v \in C$.

$\rightsquigarrow$ $u \in B$ und $v \in D$ (nach Annahme).

$\rightsquigarrow$ $w \in BD$.

Beweis

Angenommen, es gilt $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$. Sei $w \in AC$ beliebig. Dann ist $w = uv$ für Wörter $u \in A$ und $v \in C$. Nach Annahme gilt $u \in B$ und $v \in D$, woraus sofort $w \in BD$ folgt.

Vorbereitungsaufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen nicht für beliebige Sprachen A und B gelten.

1. $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$
2. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$
3. $(A \setminus B)^* = A^* \setminus B^*$

Lösung

Für jede Gleichung geben wir konkrete Sprachen A und B an, die diese nicht erfüllen. Die Korrektheit dieser Gegenbeispiele beweisen wir durch Angabe eines konkreten Wortes, das in einer Seite der Gleichung enthalten ist, aber nicht in der anderen.

1. Für $A = \{a\}$ und $B = \{aa\}$ gilt $aa \in A^* \cap B^*$ und $aa \notin (A \cap B)^*$.
2. Für $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ gilt $ab \notin A^* \cup B^*$ und $ab \in (A \cup B)^*$.
3. Für $A = B = \emptyset$ gilt $\varepsilon \notin A^* \setminus B^*$ und $\varepsilon \in (A \setminus B)^*$.

Vorbereitungsaufgabe 3

Seien $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik und $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Eine Ableitung

$$S \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w$$

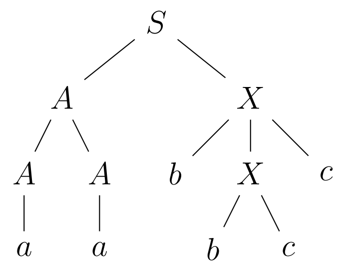
heißt *Linksableitung* (bzw. *Rechtsableitung*), falls bei jedem Ableitungsschritt die am weitesten links (bzw. rechts) stehende Variable ersetzt wurde.

Wir betrachten die 4 Ableitungen auf Vorlesungsfolie 6.4.

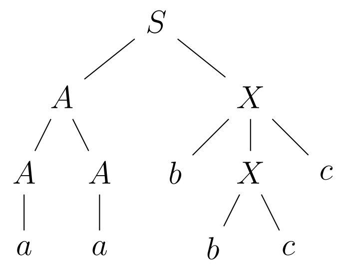
1. Welche davon sind Linksableitungen?
2. Welche davon sind Rechtsableitungen?
3. Geben Sie zu jeder Ableitung den entsprechenden Syntaxbaum an.

Lösung

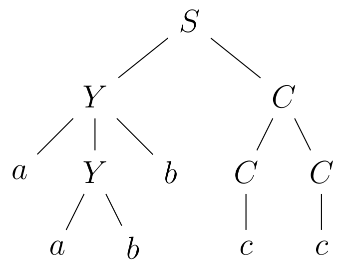
1. Nur die letzte.
2. Die letzten drei.
3. $S \Rightarrow_G AX \Rightarrow_G AAX \Rightarrow_G AaX \Rightarrow_G aaX \Rightarrow_G aabXc \Rightarrow_G aabbcc$:



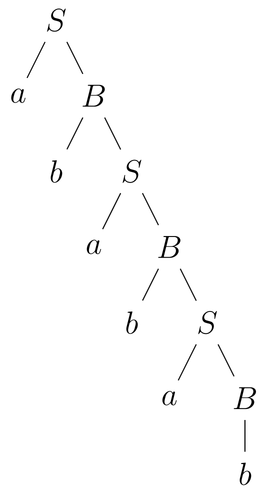
$S \Rightarrow_G AX \Rightarrow_G AbXc \Rightarrow_G Abbcc \Rightarrow_G AAbbcc \Rightarrow_G Aabbcc \Rightarrow_G aabbcc$:



$S \Rightarrow_G YC \Rightarrow_G YCC \Rightarrow_G YCc \Rightarrow_G Ycc \Rightarrow_G aYbcc \Rightarrow_G aabbcc$:



$S \Rightarrow_{G'} aB \Rightarrow_{G'} abS \Rightarrow_{G'} abaB \Rightarrow_{G'} ababS \Rightarrow_{G'} ababaB \Rightarrow_{G'} ababab$:



Vorbereitungsaufgabe 4

Für Wörter x, y über einem Alphabet Σ definieren wir folgende Relationen:

$$\begin{aligned} x \text{ ist } \textit{Präfix} \text{ von } y &:\iff \exists v \in \Sigma^*\colon y = xv \\ x \text{ ist } \textit{Suffix} \text{ von } y &:\iff \exists u \in \Sigma^*\colon y = ux \\ x \text{ ist } \textit{Infix} \text{ von } y &:\iff \exists u, v \in \Sigma^*\colon y = uxv \end{aligned}$$

1. Für welche der folgenden Wörter x und y über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist x ein Präfix/Suffix/Infix von y?

   (a) $x = ab$, $y = abbc$ (c) $x = aba$, $y = ababa$ (e) $x = ab$, $y = bbac$

   (b) $x = cb$, $y = bccb$ (d) $x = bb$, $y = abbac$ (f) $x = acb$, $y = acb$

2. Listen Sie alle Präfixe, alle Suffixe und alle Infixe von $abab$ auf.
3. Wie viele Präfixe bzw. Suffixe besitzt ein Wort der Länge n?
4. Wie viele Infixe besitzt ein Wort der Länge n mindestens? Wie viele höchstens?

Hinweis: Statt *Infix* verwendet man auch die Begriffe *Faktor* und *Teilwort*.

Lösung

1. (a) Präfix und Infix, aber kein Suffix.

   (b) Suffix und Infix, aber kein Präfix.

   (c) Präfix, Suffix und Infix.

   (d) Infix, aber kein Präfix und kein Suffix.

   (e) Weder Präfix, Suffix noch Infix.

   (f) Präfix, Suffix und Infix.

2. Präfixe: ε, a, ab, aba, $abab$.
   Suffixe: ε, b, ab, bab, $abab$.
   Infixe: ε, a, b, ab, ba, aba, bab, $abab$.

3. Ein Wort der Länge n besitzt genau $n+1$ Präfixe und ebenso viele Suffixe.
4. Ein Wort der Länge n besitzt mindestens $n+1$ und höchstens

$$1+2+3+\ldots+n+1=\sum_{k=1}^{n} k+1=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1$$

   Infixe.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet. Die Relationen Präfix, Suffix und Infix aus den Vorbereitungsaufgaben sind Ordnungsrelationen auf Σ^*. Zeigen Sie dies für die Infix-Relation.

Lösung

Für eine bessere Lesbarkeit schreiben wir $x \sqsubseteq_{\text{inf}} y$ für x *ist Infix von* y. Analog könnte man für die anderen zwei Relationen die Symbole $\sqsubseteq_{\text{pre}}$ und $\sqsubseteq_{\text{suf}}$ verwendet werden.

Zu zeigen sind folgende Aussagen:

(1) $\sqsubseteq_{\text{inf}}$ ist reflexiv.

(2) $\sqsubseteq_{\text{inf}}$ ist antisymmetrisch bzw. identitiv.

(3) $\sqsubseteq_{\text{inf}}$ ist transitiv.

Wir zeigen jede Aussage in einem separaten Beweis. Bei jedem Beweis wird zuerst die Vorgehensweise erläutert. Zu den letzten zwei geben wir zusätzlich die Beweisstruktur an.

(1) <u>Erläuterung der Vorgehensweise</u>

Die Aussage hat die Form
$$\forall x \in \Sigma^* \colon x \sqsubseteq_{\text{inf}} x,$$
d. h. sie ist eine Allaussage. Wir gehen also von einem beliebigen $x \in \Sigma^*$ aus („sei $x \in \Sigma^*$ beliebig“) und zeigen, dass x ein Infix von sich selbst ist, also $\exists u, v \in \Sigma^* \colon x = uxy$. Diese neue Aussage ist nun eine Existenzaussage, d. h. es müssen $u, v \in \Sigma^*$ konkret gewählt werden, sodass $x = uxv$ gilt. Hierfür eignen sich natürlich $u = v = \varepsilon$.

<u>Beweis</u>

Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Wähle $u = v = \varepsilon$. Dann gilt $u, v \in \Sigma^*$ und $x = \varepsilon x \varepsilon = uxv$.

(2) <u>Erläuterung der Vorgehensweise</u>

Die Aussage hat die Form

$$\forall x, y \in \Sigma^* \colon x \sqsubseteq_{\text{inf}} y \wedge y \sqsubseteq_{\text{inf}} x \implies x = y,$$

d. h. wir gehen wieder von beliebigen $x, y \in \Sigma^*$ aus („seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig“). Danach ist zu zeigen:

$$x \sqsubseteq_{\text{inf}} y \land y \sqsubseteq_{\text{inf}} x \implies x = y,$$

also eine Implikation. Wir nehmen also die linke Seite der Implikation an („angenommen, x ist Infix von y und y ist Infix von x“) und zeigen damit die rechte.

Aus den Annahmen, dass x und y Infixe voneinander sind, folgt, dass Wörter $u, v, u', v' \in \Sigma^*$ mit $y = uxv$ und $x = u'yv'$ existieren. Somit verfügt man an dieser Stelle im Beweis über die Variablen $x, y, u, v, u', v' \in \Sigma^*$ und die Annahmen $y = uxv$ und $x = u'yv'$, um damit $x = y$ zu zeigen.

Beweisstruktur

Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig. Angenommen, x ist Infix von y und y ist Infix von x.

$\rightsquigarrow$ Es gibt Wörter $u, v, u', v' \in \Sigma^*$ mit $y = uxv$ und $x = u'yv'$.

$\rightsquigarrow$ $y = uu'yv'v$.

$\rightsquigarrow$ $uu' = \varepsilon$ und $v'v = \varepsilon$ (sonst $uu'yv'v$ länger als y).

$\rightsquigarrow$ $u = v = u' = v' = \varepsilon$.

$\rightsquigarrow$ $x = u'yv' = \varepsilon y \varepsilon = y$.

Beweis

Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig. Angenommen, x ist Infix von y und y ist Infix von x. Dann gibt es Wörter $u, v, u', v' \in \Sigma^*$ mit $y = uxv$ und $x = u'yv'$. Aus $y = uxv$ und $x = u'yv'$ folgt $y = uu'yv'v$ und somit auch $uu' = \varepsilon$ und $v'v = \varepsilon$, denn sonst wäre $uu'yv'v$ länger als y. Also sind $u = v = u' = v' = \varepsilon$ und wir erhalten $x = u'yv' = \varepsilon y \varepsilon = y$.

(3) Erläuterung der Vorgehensweise

Die Aussage hat die Form

$$\forall x, y \in \Sigma^* \colon x \sqsubseteq_{\text{inf}} y \land y \sqsubseteq_{\text{inf}} z \implies x \sqsubseteq_{\text{inf}} z,$$

d. h. wir gehen wieder von beliebigen $x, y, z \in \Sigma^*$ aus („seien $x, y, z \in \Sigma^*$ beliebig“). Danach ist zu zeigen:

$$x \sqsubseteq_{\text{inf}} y \land y \sqsubseteq_{\text{inf}} z \implies x \sqsubseteq_{\text{inf}} z,$$

also eine Implikation. Wir nehmen also die linke Seite der Implikation an („angenommen, x ist Infix von y und y ist Infix von z“) und zeigen damit die rechte.

Aus den Annahmen, dass x Infix von y ist und y von z, folgt, dass Wörter $u, v, u', v' \in \Sigma^*$ mit $y = uxv$ und $z = u'yv'$ existieren. Somit verfügt man zu diesem Zeitpunkt im Beweis über die Variablen $x, y, u, v, u', v' \in \Sigma^*$ und die Annahmen $y = uxv$ und $z = u'yv'$.

Zu zeigen ist nun, dass x Infix von z ist, also hat die Aussage, die zu zeigen ist, die Form

$$\exists u'', v'' \in \Sigma^* \colon z = u''xv''.$$

Diese neue Aussage ist eine Existenzaussage, d. h. es müssen $u'', v'' \in \Sigma^*$ konkret gewählt werden, sodass $z = u''xv''$ gilt. Wegen $z = u'yv' = u'uxvv'$ ist es naheliegend $u'' = u'u$ und $v'' = vv'$ zu wählen.

Beweisstruktur

Seien $x, y, z \in \Sigma^*$ beliebig. Angenommen, x ist Infix von y und y ist Infix von z.

$\rightsquigarrow$ Es gibt Wörter $u, v, u', v' \in \Sigma^*$ mit $y = uxv$ und $z = u'yv'$.

Wähle $u'' = u'u$ und $v'' = vv'$.

$\rightsquigarrow$ $u'', v'' \in \Sigma^*$ und $z = u'yv' = u'uxvv' = u''xv''$.

Beweis

Seien $x, y, z \in \Sigma^*$ beliebig. Angenommen, x ist Infix von y und y ist Infix von z. Dann gibt es Wörter $u, v, u', v' \in \Sigma^*$ mit $y = uxv$ und $z = u'yv'$. Wähle $u'' = u'u$ und $v'' = vv'$. Dann gilt $u'', v'' \in \Sigma^*$ und $z = u'yv' = u'uxvv' = u''xv''$.

Präsenzaufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* n (in Zeichen: $x \equiv y \mod n$), falls eine ganze Zahl k existiert mit $x = y + kn$, d. h.

$$x \equiv y \mod n :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \colon x = y + kn.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch?

1. (a) $13 \equiv 1 \mod 3$
   (b) $11 \equiv 5 \mod 4$
   (c) $-8 \equiv 7 \mod 5$
   (d) $-2 \equiv -9 \mod 4$
   (e) $6 \equiv -5 \mod 1$
   (f) $5 \equiv -7 \mod 6$

2. Geben Sie zu jeder Kongruenz die 5 kleinsten nichtnegativen Zahlen x an, die die jeweilige Kongruenz erfüllen.
   (a) $x \equiv 0 \mod 3$
   (b) $x \equiv 1 \mod 3$
   (c) $x \equiv 2 \mod 3$

3. Zeigen Sie, für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass die Kongruenzrelation modulo n eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

Wichtiger Hinweis:

Die Kongruenz modulo n sollte nicht mit der Modulooperation verwechselt werden. Die Kongruenz modulo n ist eine binäre Relation auf $\mathbb{Z}$ und die Modulooperation eine Funktion $\mathrm{mod} \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ mit

$$m \bmod n = m - n \cdot \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die *untere Gaußklammer* mit $\lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ sei.

Lösung

Es gilt:

1.

(a) $13 \equiv 1 \mod 3$ (b) $11 \not\equiv 5 \mod 4$ (c) $-8 \equiv 7 \mod 5$ (d) $-2 \not\equiv -9 \mod 4$ (e) $6 \equiv -5 \mod 1$ (f) $5 \equiv -7 \mod 6$

2. (a) 0, 3, 6, 9, 12 (b) 1, 4, 7, 10, 13 (c) 2, 5, 8, 11, 14

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu zeigen sind folgende Aussagen
   (1) Die Kongruenzrelation modulo n ist reflexiv, d. h.:
   $$\forall x \in \mathbb{Z}\colon x \equiv x \mod n.$$
   (2) Die Kongruenzrelation modulo n ist symmetrisch, d. h.:
   $$\forall x, y \in \mathbb{Z}\colon x \equiv y \mod n \implies y \equiv x \mod n.$$
   (3) Die Kongruenzrelation modulo n ist transitiv, d. h.:
   $$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}\colon x \equiv y \mod n \land y \equiv z \mod n \implies x \equiv z \mod n.$$

   Wir zeigen jede Aussage in einem separaten Beweis.
   (1) Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig. Für $k := 0$ gilt $k \in \mathbb{Z}$ und $x = x + kn$.
   (2) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \equiv y \mod n$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + kn$. Wähle $k' := -k$. Dann ist $k' \in \mathbb{Z}$ mit $y = x - kn = x + k'n$.
   (3) Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \equiv y \mod n$ und $y \equiv z \mod n$. Dann gibt es ganze Zahlen $k, k' \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + kn$ und $y = z + k'n$. Wähle $k'' := k' + k$. Dann ist $k'' \in \mathbb{Z}$ mit
   $$x = y + kn = z + k'n + kn = z + (k' + k)n = z + k''n.$$

Präsenzaufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie für eine beliebige Sprache L über Σ:
$$L \subseteq L^2 \land L \neq \emptyset \iff \varepsilon \in L.$$

Lösung

Wir zeigen beide Richtungen getrennt voneinander.

„$\Longrightarrow$“

Angenommen, es gilt $L \subseteq L^2$ und $L \neq \emptyset$. Um die Beweistechnik zu üben, zeigen wir $\varepsilon \in L$ per Widerspruch, d. h. wie nehmen zu den ersten beiden Annahmen die Widerspruchsannahme $\varepsilon \notin L$ hinzu und leiten daraus einen Widerspruch her.

Sei w ein Wort minimaler Länge aus L. Dieses existiert, da $L \neq \emptyset$. Dann hat jedes Wort in L^2 mindestens die Länge $2|w|$. Wegen $\varepsilon \notin L$ ist $|w| \geq 1$, d. h. die Länge aller Wörter in L^2 ist mindestens $2|w| = |w| + |w| \geq |w| + 1$. Wegen $L \subseteq L^2$ gilt $w \in L^2$ und somit $|w| \geq |w| + 1$, ein Widerspruch!

Hinweis: Man beachte, dass alle drei Annahmen $L \subseteq L^2$, $L \neq \emptyset$ und $\varepsilon \notin L$ für den Widerspruch verwendet wurden.

„$\Longleftarrow$“

Angenommen, es gilt $\varepsilon \in L$. Wir zeigen $L \subseteq L^2$ und $L \neq \emptyset$ in getrennten Beweisen.

$L \subseteq L^2$

Sei $w \in L$ beliebig. Da $\varepsilon, w \in L$ ist $\varepsilon w = w \in L^2$.

$L \neq \emptyset$

Trivial, da $\varepsilon \in L$.

Präsenzaufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C über Σ:

1. $(A^*)^* = A^*$
2. $A^+ \subseteq A \iff A^2 \subseteq A$
3. $AB = BC \implies A^*B = BC^*$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

Lösung

1. Wir zeigen zuerst $\forall n \geq 1\colon (A^*)^n = A^*$ mit vollständiger Induktion.

   Induktionsanfang

   Für $n = 1$ gilt per Definition $(A^*)^1 = A^*$.

   Induktionsschritt

   Sei $n \geq 1$ beliebig. Angenommen, es gilt die Induktionsvoraussetzung $(A^*)^n = A^*$. Dann gilt:
   $$(A^*)^{n+1} = (A^*)^n A^* \overset{\text{IV}}{=} A^* A^* \overset{3.}{=} A^*.$$

   Nun beweisen wir $(A^*)^* = A^*$.

$(A^*)^* \subseteq A^*$

Sei $w \in (A^*)^*$ beliebig. Dann existiert ein $n \geq 0$ mit $w \in (A^*)^n$.

1. Fall: $n = 0$

Dann ist $w = \varepsilon \in A^*$.

2. Fall: $n \geq 1$

Dann ist $w \in (A^*)^n = A^*$.

In beiden Fällen ist $w \in A^*$

$A^* \subseteq (A^*)^*$

Trivial, da für jede Sprache L die Inklusion $L \subseteq L^*$ gilt.

2. $A^+ \subseteq A \implies A^2 \subseteq A$

   Angenommen, es gilt $A^+ \subseteq A$. Sei $w \in A^2$ beliebig. Dann existiert ein $n \geq 1$ mit $w \in A^n$ (nämlich $n = 2$).

   $A^2 \subseteq A \implies A^+ \subseteq A$

   Angenommen, es gilt $A^2 \subseteq A$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \geq 1\colon A^n \subseteq A.$$

Induktionsanfang

Für $n = 1$ gilt per Definition $A^1 = A$.

Induktionsschritt

Sei $n \geq 1$ beliebig. Angenommen, es gilt $A^n \subseteq A$. Zu zeigen ist $A^{n+1} \subseteq A$.

Sei also $w \in A^{n+1}$ beliebig. Dann ist $w = uv$ für Wörter $u \in A^n$ und $v \in A$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $u \in A$, d. h. $w \in AA = A^2 \subseteq A$.

Nun verwenden wir diese Aussage, um $A^+ \subseteq A$ zu zeigen.

Sei also $w \in A^+$ beliebig. Dann existiert ein $n \geq 1$ mit $w \in A^n$. Wegen $A^n \subseteq A$ ist $w \in A$.

3. Angenommen, es gilt $AB = BC$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \geq 0\colon A^n B = BC^n.$$

Induktionsanfang

$A^0 B = \{\varepsilon\} B = B = B\{\varepsilon\} = BC^0$.

Induktionsschritt

Sei $n \geq 0$ beliebig. Angenommen, es gilt $A^n B = BC^n$. Zu zeigen ist $A^{n+1}B = BC^{n+1}$. Tatsächlich gilt:

$$A^{n+1}B = A^n AB = A^n BC \overset{\text{IV}}{=} BC^n C = BC^{n+1}.$$

Nun verwenden wir diese Aussage, um $A^*B = BC^*$ zu zeigen, wobei wir diesmal durch Äquivalenzumformungen beide Richtungen auf einmal zeigen.

Sei $w \in \Sigma^*$ beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
w \in A^*B &\iff w = uv \text{ für Wörter } u \in A^* \text{ und } v \in B \\
&\iff w = uv \text{ für ein } n \geq 0 \text{ und Wörter } u \in A^n \text{ und } v \in B \\
&\iff w \in A^nB \text{ für ein } n \geq 0 \\
&\iff w \in BC^n \text{ für ein } n \geq 0 \\
&\iff w = uv \text{ für ein } n \geq 0 \text{ und Wörter } u \in B \text{ und } v \in C^n \\
&\iff w = uv \text{ für Wörter } u \in B \text{ und } v \in C^* \\
&\iff w \in BC^*.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 5

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Sprachen A und B?

1. $A^* \cap B^* = (A^* \cap B^*)^*$.
2. $A^* \cup B^* = (A^* \cup B^*)^*$.

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Lösung

Da für jede Sprache L die Inklusion $L \subseteq L^*$ gilt, sind beide Inklusionen von links nach rechts erfüllt. Wir betrachten deshalb nur die Inklusionen von rechts nach links.

1. Die Aussage ist richtig. Weil die Inklusion von links nach rechts trivial ist, zeigen wir nur die Inklusion von rechts nach links, d. h. $(A^* \cap B^*)^* \subseteq A^* \cap B^*$.

   Beweis

   Seien A und B Sprachen und $w \in (A^* \cap B^*)^*$ beliebig. Dann ist $w = w_1 \dots w_n$ für ein $n \geq 0$ und Wörter $w_1, \dots, w_n \in A^* \cap B^*$, d. h. $w_1, \dots, w_n \in A^*$ und $w_1, \dots, w_n \in B^*$. Somit ist $w \in (A^*)^* = A^*$ und $w \in (B^*)^* = B^*$, also $w \in A^* \cap B^*$.

2. Die Aussage ist falsch. Für $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ gilt $ab \in (A^* \cup B^*)^*$, aber $ab \notin A^* \cup B^*$.

   Bemerkung:

   Dass der Beweis aus Teil 1 nicht derart angepasst werden kann, dass ein korrekter Beweis für Teil 2 entsteht, sollte klar sein. Sonst wäre die Aussage wahr und somit das angegebene Gegenbeispiel falsch. Es entsteht die Frage: Welche Stelle ist bei folgender (naheliegenden) Anpassung des obigen Beweises falsch?

   Falscher Beweisversuch

   Seien A und B Sprachen und $w \in (A^* \cup B^*)^*$ beliebig. Dann ist $w = w_1 \dots w_n$ für ein $n \geq 0$ und Wörter $w_1, \dots, w_n \in A^* \cup B^*$, d. h. $w_1, \dots, w_n \in A^*$ oder $w_1, \dots, w_n \in B^*$. Somit ist $w \in (A^*)^* = A^*$ oder $w \in (B^*)^* = B^*$, also $w \in A^* \cup B^*$.

Antwort: siehe Fußnote[*].

Präsenzaufgabe 6

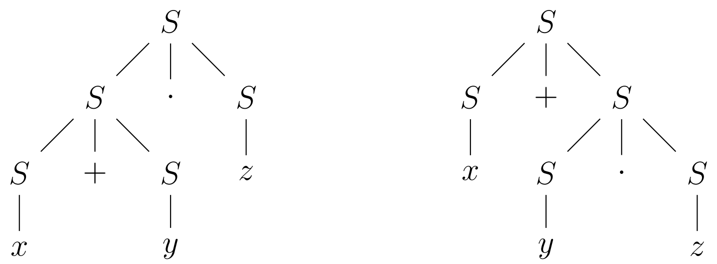
Seien $\Sigma = \{+, \cdot, x, y, z\}$ ein Alphabet und $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik mit den Produktionen

$$S \to S + S \mid S \cdot S \mid x \mid y \mid z.$$

1. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist, indem Sie zwei verschiedene Syntaxbäume für das Wort $x + y \cdot z$ angeben.
2. Geben Sie zu jedem der zwei Syntaxbäume die entsprechende Linksableitung an.
3. Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$.
4. Keine Typ-3-Sprache ist inhärent mehrdeutig. Zeigen Sie, dass $L(G)$ nicht inhärent mehrdeutig ist, indem Sie eine Typ-3-Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ konstruieren. Sie müssen die Korrektheit Ihrer Konstruktion nicht beweisen.

Lösung

1. Das Wort $x + y \cdot z$ besitzt genau folgende zwei Syntaxbäume:



2. Linksableitung des ersten Baumes:

$$S \Rightarrow_G S \cdot S \Rightarrow_G S + S \cdot S \Rightarrow_G x + S \cdot S \Rightarrow_G x + y \cdot S \Rightarrow_G x + y \cdot z.$$

   Linksableitung des zweiten Baumes:

$$S \Rightarrow_G S + S \Rightarrow_G x + S \Rightarrow_G x + S \cdot S \Rightarrow_G x + y \cdot S \Rightarrow_G x + y \cdot z.$$

3. $L(G) = \{x, y, z\}\big(\{+, \cdot\}\{x, y, z\}\big)^* = \big(\{x, y, z\}\{+, \cdot\}\big)^*\{x, y, z\}.$
4. Definiere $G' = (\{S, T\}, \Sigma, P', S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to xT \mid yT \mid zT \mid x \mid y \mid z \\ T &\to +S \mid \cdot S. \end{aligned}$$

[*] Aus $w_1, \ldots, w_n \in A^* \cup B^*$ folgt nicht $w_1, \ldots, w_n \in A^*$ oder $w_1, \ldots, w_n \in B^*$, sondern nur, dass jedes der Wörter $w_1, \ldots, w_n$ jeweils in A^* oder in B^* enthalten ist. Sie müssen aber nicht notwendigerweise alle in A^* oder alle in B^* enthalten sein. Bei dem Gegenbeispiel wurde gerade diese Situation ausgenutzt. Es ist nämlich $w = w_1 w_2$ mit $w_1 = a \in A^*$ und $w_2 = b \in B^*$.

Präsenzaufgabe 7

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $x = ababb$ ein Wort über Σ und $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to aTb \mid aSba \mid b \\ T &\to aT \mid bTb \mid bbSa \mid a. \end{aligned}$$

1. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass das Wortproblem für Typ-1-Sprachen entscheidbar ist. Verwenden Sie den Algorithmus aus dem Beweis dieses Satzes, um das Wortproblem für G und x zu entscheiden.
2. Im Rahmen dieser Aufgabe nennen wir eine Grammatik (V, Σ, P, S) *linear*, falls für jede Produktion $(u, v) \in P$ gilt: $u \in V$ und $v \in \Sigma^* V \Sigma^* \cup \Sigma^*$.

   Ist G linear?
3. Verändern Sie ihn so, dass er das Wortproblem für lineare Grammatiken in quadratischer Zeit löst.

   Zeigen Sie die quadratische Laufzeit Ihres Algorithmus, indem Sie Konstanten $a, b, c > 0$ mit $|T| \leq an^2 + bn + c$ für $n = |x|$ finden.
4. Verwenden Sie den veränderten Algorithmus, um das Wortproblem für G und x zu entscheiden.

Lösung

1. Wie in der Vorlesung bezeichne T_i die Menge T nach dem i-ten Durchgang. Wir erhalten:
   - $T_0 = \{S\}$
   - $T_1 = T_0 \cup \{aTb, aSba, b\}$
   - $T_2 = T_1 \cup \{aaTb, abTbb, aab, abba\}$
   - $T_3 = T_2 \cup \{aaaTb, aaab, ababb\}$

   Wegen $x \in T_3$ bricht der Algorithmus ab und gibt 1 zurück.
2. Ja! Für jede Produktion $u \to v$ gilt $u \in V$ und entweder $v \in \Sigma^*$ (für $S \to b$ und $T \to a$) oder $v \in \Sigma^* V \Sigma^*$ (für die restlichen 5).
3. Definiere:

   $$\begin{aligned} \mathrm{Abl}_n(X) = X \cup \{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid\ & |w| \leq n,\ \exists y \in X : y \Rightarrow_G w \text{ und entweder} \\ & w = x \text{ oder } w = w_1 A w_2 \text{ für ein } A \in V, \text{ ein} \\ & \text{Präfix } w_1 \text{ von } x \text{ und ein Suffix } w_2 \text{ von } x\}. \end{aligned}$$

   Dann kann T maximal
   - $|V|$ Satzformen der Länge 1,
   - $2|V|$ Satzformen der Länge 2,

$\vdots$

- $(n-1)|V|$ Satzformen der Länge $n-1$ und
- $n|V|+1$ Satzformen der Länge n

enthalten. Das ergibt insgesamt

$$\sum_{k=1}^{n} k|V|+1 = |V|\sum_{k=1}^{n} k+1 = |V|\frac{n(n+1)}{2}+1 = \frac{|V|}{2}n^2+\frac{|V|}{2}n+1,$$

also ist die Kardinalität von T höchstens quadratisch in n.

4. Diesmal erhalten wir:
   - $T_0 = \{S\}$
   - $T_1 = T_0 \cup \{aTb\}$
   - $T_2 = T_1 \cup \{abTbb\}$
   - $T_3 = T_2 \cup \{ababb\}$

   Wegen $x \in T_3$ bricht der Algorithmus ab und gibt 1 zurück.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Obwohl die Kongruenzrelation modulo n und die Modulooperation nicht verwechselt werden sollten, stehen beide Konzepte in enger Beziehung zueinander. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt nämlich:

(1) $x \equiv y \mod n \iff x \bmod n = y \bmod n$

(2) $x = y \bmod n \iff x \equiv y \mod n \wedge 0 \leq x < n$

Zeigen Sie beide Äquivalenzen.

Knobelaufgabe 2

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die binäre Relation $\sim$ auf Σ^* mit

$$x \sim y :\iff \exists u \in \Sigma^*\colon xu = uy$$

eine Äquivalenzrelation ist.