Lösungsblatt 5

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

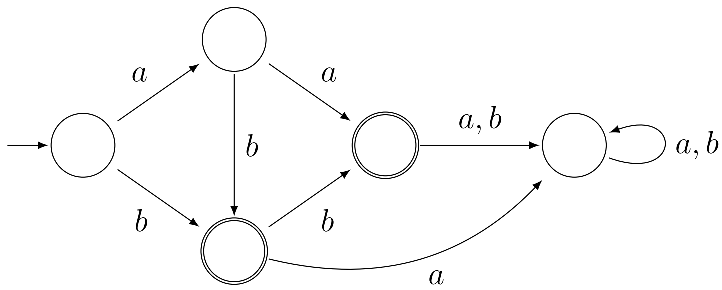
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für die Sprache

$$L = \{b, aa, ab, bb, abb\}$$

über Σ grafisch den minimalen DFA an, der L akzeptiert.

Lösung

Bis auf die Benennung der Zustände ist folgende Lösung eindeutig:



Vorbereitungsaufgabe 2

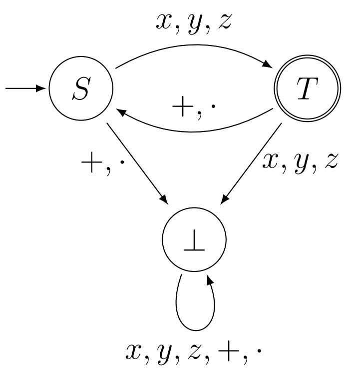
Sei $G' = (\{S, T\}, \Sigma, P', S)$ die Grammatik aus Präsenzaufgabe 6.4 vom Ergänzungsblatt 3 mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to xT \mid yT \mid zT \mid x \mid y \mid z \\ T &\to +S \mid \cdot S. \end{aligned}$$

Geben Sie einen minimalen DFA an, der $L(G')$ akzeptiert.

Lösung

Für die Benennung der Zustände wurden die Variablen von G' verwendet.



Vorbereitungsaufgabe 3

Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine positive natürliche Zahl. Im Stellenwertsystem zur Basis b werden natürliche Zahlen als Wörter über dem Alphabet

$$\Sigma = \begin{cases} \{0, \dots, b-1\} & \text{für } b \geq 2 \\ \{1\} & \text{für } b = 1 \end{cases}$$

dargestellt. Man nennt dann $w \in \Sigma^*$ eine *Darstellung zur Basis* b der Zahl

$$w_b = \sum_{k=1}^{|w|} w[k] \cdot b^{|w|-k}.$$

Dabei ist $w[k]$ der Buchstabe an der k-ten Position des Wortes w, d. h. $w = w[1] \dots w[|w|]$.

Hinweise:

- Formal ist $(\cdot)_b \colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$ eine Funktion, die jeder Ziffernfolge $w \in \Sigma^*$ eine natürliche Zahl $w_b \in \mathbb{N}$ zuordnet.
- Man beachte, dass der Fall $\varepsilon_b = 0$ durch obige Definition auch abgedeckt wird, da leere Summen (solche, bei denen die untere Grenze größer als die obere ist) als 0 definiert sind.
- Statt *Darstellung zur Basis* b sagt man auch kurz b*-äre Darstellung*. Für $b = 1$ nennt man diese *Unärdarstellung*, für $b = 2$ *Binärdarstellung* und für $b = 3$ *Ternärdarstellung*.

1. Bestimmen Sie:

   (a) $(11111)_1$
   (b) $(1^{17})_1$
   (c) $(1101)_2$
   (d) $(01010)_2$
   (e) $(11011)_2$
   (f) $(0120)_3$
   (g) $(1021)_3$
   (h) $(123)_4$
   (i) $(1203)_4$
   (j) $(2401)_5$
   (k) $(357)_8$
   (l) $(00925)_{10}$

2. Bestimmen Sie:

(a) Eine Binärdarstellung der Zahl 55.

(b) Eine Ternärdarstellung der Zahl 64.

(c) Eine Darstellung zur Basis 4 der Zahl 120.

(d) Eine Darstellung zur Basis 5 der Zahl 248.

3. Seien nun $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ beliebig. Geben Sie $(wa)_b$ und $(aw)_b$ in Abhängigkeit von a, b, w_b und $|w|$ an.

Lösung

1. (a) 5 (b) 17 (c) 13 (d) 10 (e) 27 (f) 15 (g) 34 (h) 27 (i) 99 (j) 351 (k) 239 (l) 925

2. Bis auf führende Nullen, sind die Lösungen eindeutig. Wir geben zu jeder Zahl die kürzeste Darstellung (diejenige ohne führende Nullen) an.

   (a) 110111 (b) 2101 (c) 1320 (d) 1443

3. Es gilt

$$\begin{aligned}(wa)_b &= \sum_{k=1}^{|wa|}(wa)[k] \cdot b^{|wa|-k} = \sum_{k=1}^{|wa|-1}(wa)[k] \cdot b^{|wa|-k} + (wa)[|wa|] \cdot b^{|wa|-|wa|} \\ &= \sum_{k=1}^{|w|} w[k] \cdot b^{|w|-k+1} + a \cdot b^0 = b \cdot \sum_{k=1}^{|w|} w[k] \cdot b^{|w|-k} + a = bw_b + a\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(aw)_b &= \sum_{k=1}^{|aw|}(aw)[k] \cdot b^{|aw|-k} = (aw)[1] \cdot b^{|aw|-1} + \sum_{k=2}^{|aw|}(aw)[k] \cdot b^{|aw|-k} \\ &= ab^{|w|} + \sum_{k=2}^{|w|+1}(aw)[k] \cdot b^{|w|+1-k} = ab^{|w|} + \sum_{k=1}^{|w|}(aw)[k+1] \cdot b^{|w|+1-(k+1)} \\ &= ab^{|w|} + \sum_{k=1}^{|w|} w[k] \cdot b^{|w|-k} = ab^{|w|} + w_b.\end{aligned}$$

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ ihr Komplement. Zeigen Sie, dass $\overline{L}$ regulär ist, wenn L regulär ist.

Lösung

Zu zeigen ist die Implikation

$$L \text{ ist regulär} \implies \overline{L} \text{ ist regulär.}$$

Angenommen, L ist regulär. Dann gibt es einen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $T(M) = L$. Wir zeigen die Regularität von $\overline{L}$, indem wir die Existenz eines DFA M' mit $T(M') = \overline{L}$ zeigen.

Wähle $M' = (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$. Dann ist M' ein DFA mit

$$\begin{aligned} w \in T(M') &\iff \hat{\delta}(s, w) \in Q \setminus F \\ &\iff \hat{\delta}(s, w) \notin F \\ &\iff w \notin T(M) \\ &\iff w \in \overline{L} \end{aligned}$$

für alle $w \in \Sigma^*$.

Präsenzaufgabe 2

Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen grafisch einen minimalen DFA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

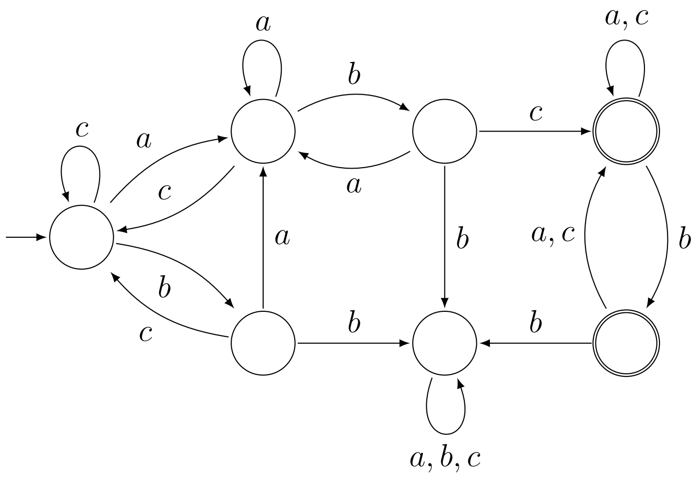
1. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid abc \text{ ist ein Faktor von } w \text{, aber } bb \text{ nicht}\}$
2. $L = \{a^m b a^n \mid m + n \equiv 1 \mod 3\}$
3. $L = \{\mathrm{bin}(4k) \mid k \in \mathbb{N}\}$
4. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a \equiv 2|w|_b + 1 \mod 5\}$

Hinweis: Mit $\mathrm{bin}(n)$ bezeichnen wir die Binärdarstellung von $n \in \mathbb{N}$ ohne führende Nullen. Beispiele: $\mathrm{bin}(0) = 0$, $\mathrm{bin}(6) = 110$ und $\mathrm{bin}(13) = 1101$.

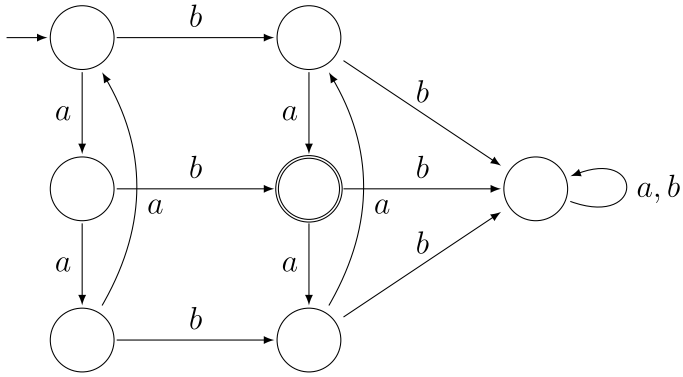
Lösung

Bis auf die Benennung der Zustände sind die Lösungen eindeutig.

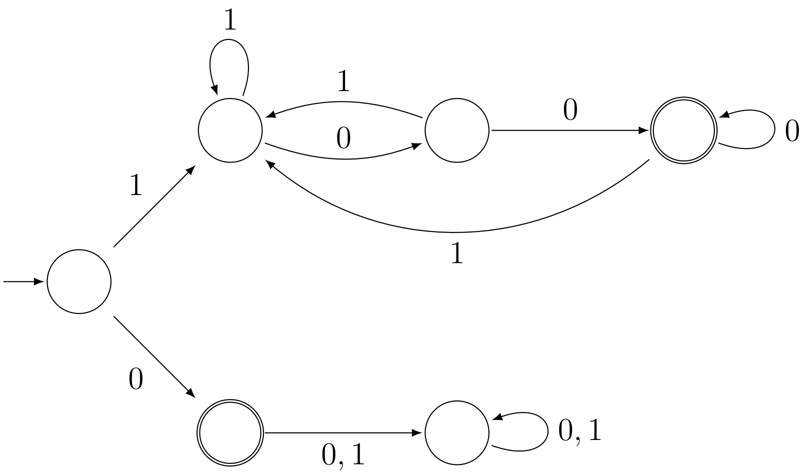
1.



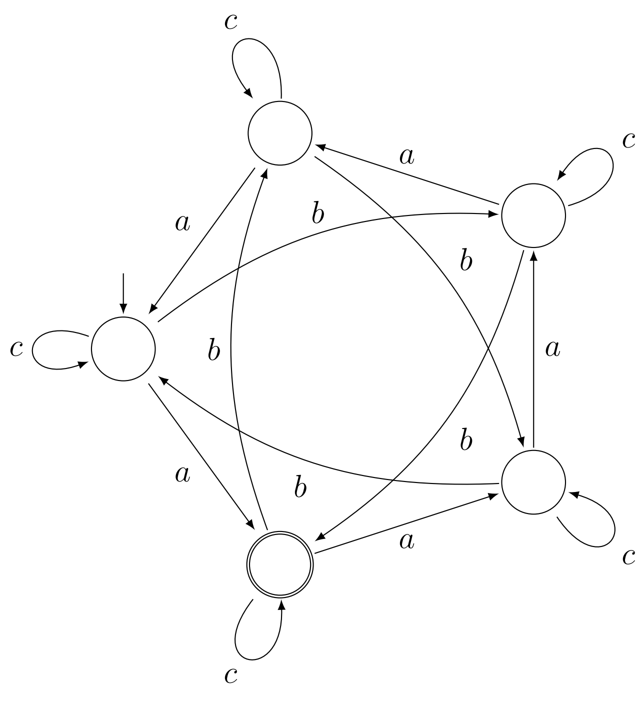
2.



3.



4.



Präsenzaufgabe 3

Seien $b, n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen mit $b \geq 2$ und $\Sigma = \{0, \dots, b-1\}$ ein Alphabet. Geben Sie einen DFA M an, der die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w_b \equiv 1 \mod n\}$$

über Σ akzeptiert und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Hinweis: Sie dürfen die Aussagen aus folgenden Aufgaben als bewiesen annehmen:

- Ergänzungsblatt 3, Knobelaufgabe 1
- Ergänzungsblatt 4, Knobelaufgabe 2

Lösung

Lösungsidee

Wegen

$$w_b \equiv 1 \mod n \iff w_b \bmod n = \underbrace{1 \bmod n}_{=1}$$

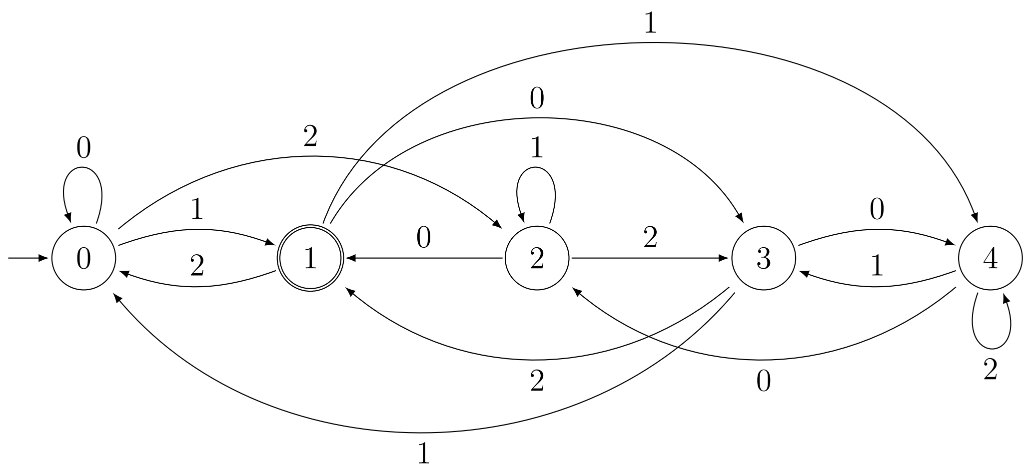
konstruieren wir den DFA so, dass dieser für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ den Wert $w_b \bmod n$ berechnet. Da dieser nur einen Wert aus $\{0, \dots, n-1\}$ annehmen kann, kann man diese Menge als Zustandsmenge Q wählen. Der einzige Endzustand ist dann die Eins und der Startzustand wegen $\varepsilon_b \bmod n = 0$ die Null.

Wir versuchen die Überführungsfunktion so zu wählen, dass

$$\hat{\delta}(0, w) = w_b \bmod n$$

für alle $w \in \Sigma^*$ gilt. Wegen $(wa)_b = bw_b + a$ (siehe Vorbereitungsaufgabe 3) ist es naheliegend, die Überführungsfunktion $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$ mit $\delta(q, a) = (bq + a) \bmod n$ zu definieren.

Für $b = 3$ und $n = 5$ erhält man beispielsweise:



Konstruktion

Wähle $M = (Q, \Sigma, \delta, 0, F)$ mit $Q = \{0, \ldots, n-1\}$, $F = \{1\}$ und $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ mit
$$\delta(q, a) = (bq + a) \bmod n.$$

Korrektheitsbeweis

Für die Korrektheit zeigen wir zuerst
$$\forall w \in \Sigma^*\colon \hat{\delta}(0, w) = w_b \bmod n, \tag{$*$}$$
indem wir die äquivalente Aussage
$$\forall \ell \geq 0\colon \underbrace{\forall w \in \Sigma^\ell\colon \hat{\delta}(0, w) = w_b \bmod n}_{A(\ell)}$$
mit vollständiger Induktion nach ℓ beweisen. Wir sagen in solchen Fällen, dass die Induktion *über die Wortlänge ℓ geht.*

Induktionsanfang

Für $\ell = 0$ ist ε das einzige Wort in Σ^ℓ. Tatsächlich gilt $\hat{\delta}(0, \varepsilon) = 0 = \varepsilon_b \bmod n$.

Induktionsschritt

Sei $\ell \geq 0$ beliebig. Angenommen, es gilt $\hat{\delta}(0, w) = 0 = w_b \bmod n$ für jedes $w \in \Sigma^\ell$ (Induktionsvoraussetzung). Sei nun $w' \in \Sigma^{\ell+1}$ beliebig. Dann ist $w' = wa$ für ein $w \in \Sigma^\ell$ und ein $a \in \Sigma$ und es folgt:
$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(0, w') = \hat{\delta}(0, wa) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(0, w), a) &= \delta(\hat{\delta}(0, w), a) \\
&= (b\hat{\delta}(0, w) + a) \bmod n \\
&\overset{\text{IV}}{=} (b(w_b \bmod n) + a) \bmod n \\
&\overset{(1)}{=} ((b(w_b \bmod n)) \bmod n + a) \bmod n \\
&\overset{(2)}{=} ((bw_b) \bmod n + a) \bmod n \\
&\overset{(1)}{=} (bw_b + a) \bmod n = (wa)_b \bmod n = (w')_b \bmod n.
\end{aligned}$$

Sei nun $w \in \Sigma^*$ beliebig. Aus
$$\begin{aligned}
w \in T(M) &\iff \hat{\delta}(0, w) \in \{1\} \\
&\iff \hat{\delta}(0, w) = 1 \\
&\overset{(*)}{\iff} w_b \bmod n = 1 \\
&\iff w_b \equiv 1 \mod n \\
&\iff w \in L
\end{aligned}$$
folgt die Mengengleichheit $T(M) = L$.

Alternativer Korrektheitsbeweis

Im Induktionsbeweis der Aussage $(*)$ wird die Zerlegung $w' = wa$ betrachtet. Es kann jedoch auch die Zerlegung $w' = aw$ gewählt werden. Allerding muss in diesem Fall statt $(*)$ eine allgemeinere Aussage gezeigt werden.

Knobelaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ ein Alphabet. Geben Sie grafisch einen möglichst kleinen DFA an, der die Sprache

$$L = \left\{ w \in \Sigma^* \,\middle|\, (w_3)^2 \equiv 0 \mod 6 \right\}$$

über Σ akzeptiert.

Knobelaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und L die Menge an Wörtern über Σ mit gerade vielen as in geraden Positionen und ungerade vielen bs in ungeraden Positionen. Formal:

$$L = \{ w \in \Sigma^* \mid |\{ i \mid w[2i] = a \}| \text{ gerade} \wedge |\{ i \mid w[2i+1] = b \}| \text{ ungerade} \} .$$

Geben Sie grafisch einen möglichst kleinen DFA für L an.

Hinweis: Für die Bedeutung von $w[2i]$ bzw. $w[2i{+}1]$ siehe Vorbereitungsaufgabe 3.

Knobelaufgabe 3

Seien Σ ein Alphabet und w ein Wort über Σ. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen über Σ einen DFA an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktionen.

1. $w\Sigma^*$
2. $\Sigma^* w$
3. $\Sigma^* w \Sigma^*$

Hinweis: Beim Produkt (= Konkatenation) von Sprachen lässt man bei einelementigen Sprachen die Mengenklammern oft weg. Somit sind in dieser Aufgabe eigentlich die Sprachen $\{w\}\Sigma^*$, $\Sigma^*\{w\}$ und $\Sigma^*\{w\}\Sigma^*$ gemeint.