

Lösungsblatt 6

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ grafisch einen minimalen NFA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $aba\Sigma^*$
2. $\Sigma^*aba\Sigma^*$
3. Σ^*aba
4. $\Sigma^2a\Sigma^*$
5. $\Sigma^*a\Sigma^2$

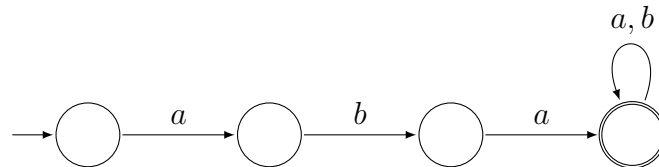
Lösung

Beim Produkt (= Konkatenation) von Sprachen lässt man bei einelementigen Sprachen die Mengenklammern oft weg. Somit sind in dieser Aufgabe eigentlich die Sprachen $\{aba\}\Sigma^*$, $\Sigma^*\{aba\}\Sigma^*$, $\Sigma^*\{aba\}$, $\Sigma^2\{a\}\Sigma^*$ und $\Sigma^*\{a\}\Sigma^2$ gemeint.

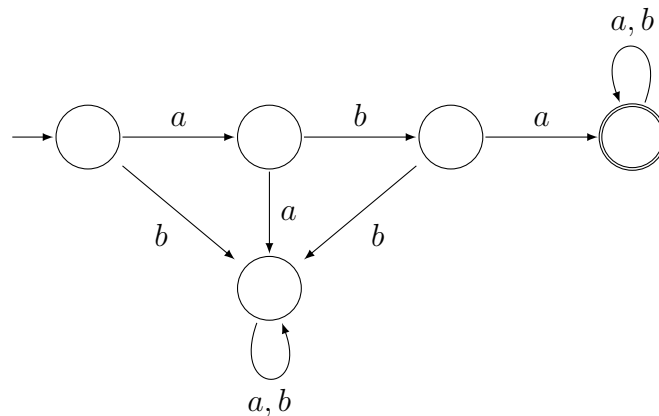
1. Es gilt:

$$aba\Sigma^* = \{abav \mid v \in \Sigma^*\} = \{w \in \Sigma^* \mid aba \text{ ist Präfix von } w\}.$$

Ein minimaler NFA für $aba\Sigma^*$:



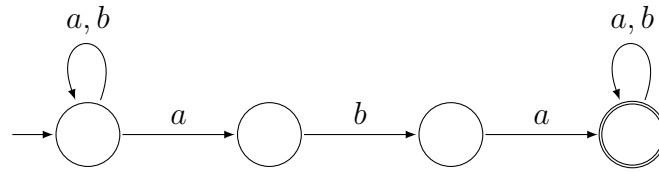
Der minimale DFA für $aba\Sigma^*$ zum Vergleich:



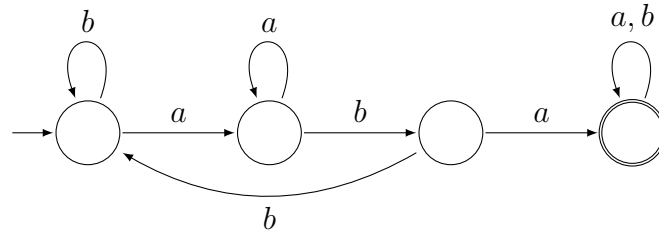
2. Es gilt:

$$\Sigma^* aba \Sigma^* = \{uabav \mid u, v \in \Sigma^*\} = \{w \in \Sigma^* \mid aba \text{ ist Infix von } w\}.$$

Ein minimaler NFA für $\Sigma^* aba \Sigma^*$:



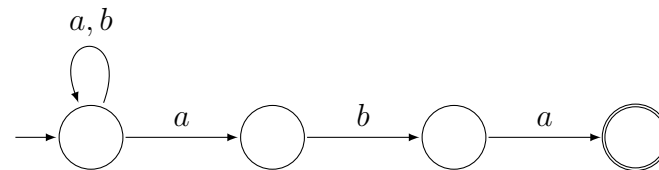
Der minimale DFA für $\Sigma^* aba \Sigma^*$ zum Vergleich:



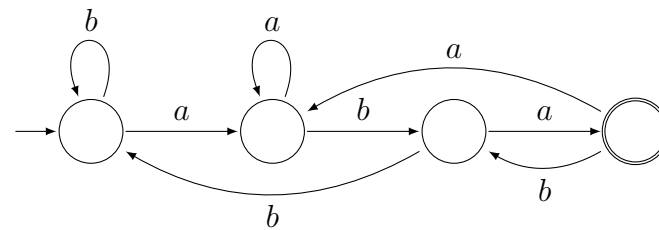
3. Es gilt:

$$\Sigma^* aba = \{uaba \mid u \in \Sigma^*\} = \{w \in \Sigma^* \mid aba \text{ ist Suffix von } w\}.$$

Ein minimaler NFA für $\Sigma^* aba$:



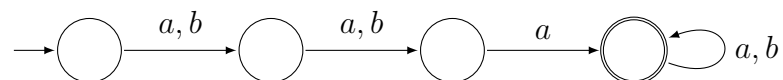
Der minimale DFA für $\Sigma^* aba$ zum Vergleich:



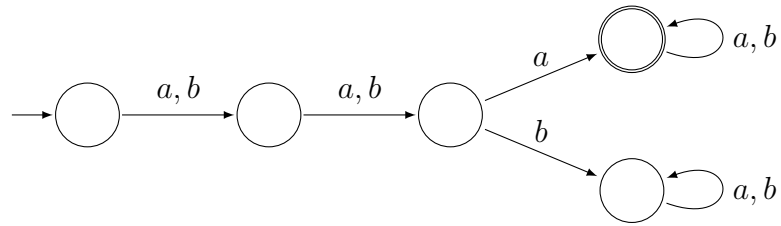
4. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma^2 a \Sigma^* &= \{uav \mid u \in \Sigma^2 \wedge v \in \Sigma^*\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w[3] = a\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \text{das dritte Zeichen von } w \text{ ist ein } a\}. \end{aligned}$$

Ein minimaler NFA für $\Sigma^2 a \Sigma^*$:



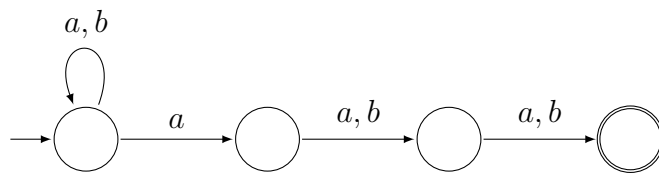
Der minimale DFA für $\Sigma^*a\Sigma^2$ zum Vergleich:



5. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma^*a\Sigma^2 &= \{uav \mid u \in \Sigma^* \wedge v \in \Sigma^2\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w[|w| - 2] = a\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \text{das drittletzte Zeichen von } w \text{ ist ein } a\}. \end{aligned}$$

Ein minimaler NFA für $\Sigma^*a\Sigma^2$:



Zum Vergleich: Der minimale DFA für $\Sigma^*a\Sigma^2$ besitzt 8 Zustände.

Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $G = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit Produktionen

$$S \rightarrow aT \mid b \qquad T \rightarrow bT \mid bU \qquad U \rightarrow bS \mid a \mid b.$$

Verwenden Sie die auf Vorlesungsfolien 11.6 und 12.1 beschriebene Methode, um einen NFA M mit $T(M) = L(G)$ zu konstruieren.

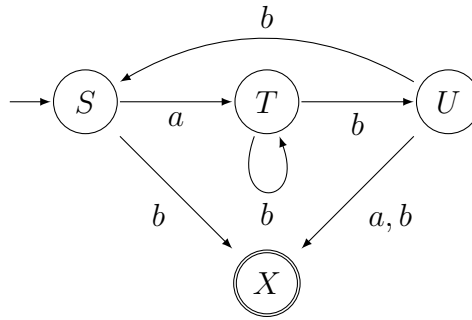
Geben Sie M sowohl als Tupel als auch grafisch an.

Lösung

$M = (\{S, T, U, X\}, \{a, b\}, \delta, S, \{X\})$ mit

δ	a	b
S	$\{T\}$	$\{X\}$
T	\emptyset	$\{T, U\}$
U	$\{X\}$	$\{S, X\}$
X	\emptyset	\emptyset

Grafisch:



Vorbereitungsaufgabe 3

Sei $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \delta, \{p, q\}, \{q\})$ ein NFA mit folgender Überföhrungsfunktion δ :

δ	a	b
p	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{p\}$	\emptyset

- Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{p\}, ab)$ durch wiederholtes Anwenden der Definition von $\hat{\delta}$ (siehe Vorlesungsfolie 9.7).
- Geben Sie M grafisch an.
- Geben Sie folgende Potenzmengen explizit an:

- (a) $\mathcal{P}(\emptyset)$ (b) $\mathcal{P}(\{1\})$ (c) $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ (d) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

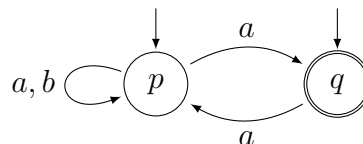
Hinweise:

- Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A , d. h.: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.
 - Alternative Schreibweisen für $\mathcal{P}(A)$ sind unter anderem 2^A und $\text{Pot}(A)$.
 - Für eine endliche Menge A besitzt $\mathcal{P}(A)$ genau $2^{|A|}$ Elemente.
- Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion aus Vorlesungsfolie 10.6, um den zu M entsprechenden Potenzmengenautomat M' zu konstruieren.

Geben Sie M' sowohl als Tupel als auch grafisch an. Beachten Sie, dass M' genau $2^2 = 4$ Zustände besitzen sollte.

Lösung

- $\hat{\delta}(\{p\}, ab) = \hat{\delta}(\{p, q\}, b) = \hat{\delta}(\{p\}, \varepsilon) \cup \hat{\delta}(\emptyset, \varepsilon) = \{p\} \cup \emptyset = \{p\}$.
-



- (a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(b) $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

(c) $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

(d) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

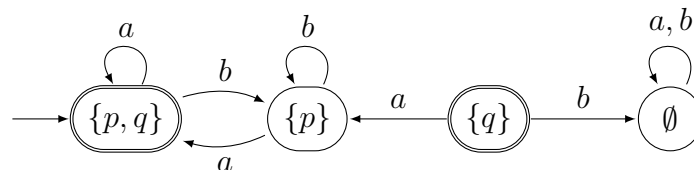
4. $M = (\{\mathcal{P}(\{p, q\}), \{a, b\}, \delta', \{p, q\}, \{\{q\}, \{p, q\}\})$ mit:

- $\delta'(\emptyset, a) = \emptyset$
- $\delta'(\emptyset, b) = \emptyset$
- $\delta'(\{p\}, a) = \{p, q\}$
- $\delta'(\{p\}, b) = \{p\}$
- $\delta'(\{q\}, a) = \{p\}$
- $\delta'(\{q\}, b) = \emptyset$
- $\delta'(\{p, q\}, a) = \{p, q\} \cup \{q\} = \{p, q\}$
- $\delta'(\{p, q\}, b) = \{p\} \cup \emptyset = \{p\}$

Die Überföhrungsfunktion δ' als Tabelle:

δ'	a	b
\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
$\{q\}$	$\{p\}$	\emptyset
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$

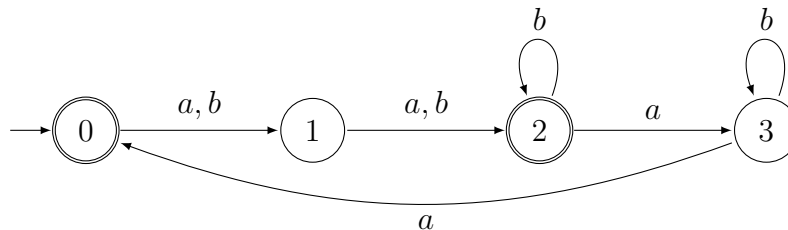
Der DFA M' grafisch:



Bemerkung: Man beachte, dass die Zustände \emptyset und $\{q\}$ nicht vom Startzustand $\{p, q\}$ erreichbar sind. Somit könnten sie entfernt werden, ohne die akzeptierte Sprache zu verändern. Das macht man in der Regel so, wird aber in der Potenzmengenkonstruktion nicht gefordert.

Vorbereitungsaufgabe 4

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der folgende DFA:



Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob Wörter $w \in \Sigma^*$ existieren, die jeweilige Aussage (a) erfüllen (b) nicht erfüllen.

1. $\forall q \in Q: \exists p \in Q: \hat{\delta}(p, w) = q$

2. $\forall p \in Q: \exists q \in Q: \hat{\delta}(p, w) = q$
3. $\exists q \in Q: \forall p \in Q: \hat{\delta}(p, w) = q$
4. $\exists p \in Q: \forall q \in Q: \hat{\delta}(p, w) = q$

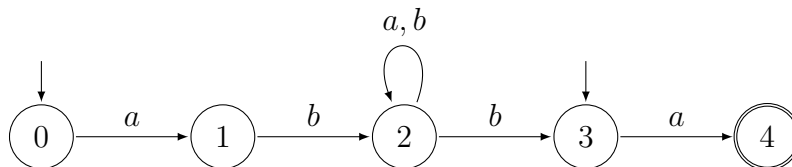
Lösung

1. (a) Ja, z. B.: ε, a, aa und aaa .
(b) Ja, z. B.: b, ab, ba und bb .
2. (a) Ja, alle.
(b) Nein.
3. (a) Ja, z. B.: $bbaaab, bbaabb, abbaaab$ und $abbaabb$.
(b) Ja, z. B.: ε, a, b und aa .
4. (a) Nein.
(b) Ja, alle.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ der folgende NFA mit Zustandsmenge $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Startzustandsmenge $S = \{0, 3\}$ und Endzustandsmenge $F = \{4\}$:



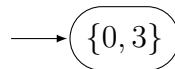
1. Geben Sie eine möglichst einfache Darstellung von $T(M)$ an.
2. Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion, um einen DFA M' mit $T(M') = T(M)$ zu konstruieren. Geben Sie M' grafisch an. Nicht erreichbare Zustände müssen nicht gezeichnet werden.

Lösung

1. $T(M) = \{a\} \cup \{abwba \mid w \in \Sigma^*\}$
2. Wir wiederholen die Konstruktion aus Vorbereitungsaufgabe 3 mit dem Unterschied, dass wir mit dem Startknoten $S \in \mathcal{P}(Q)$ beginnen und so lange erreichbare Zustände in den DFA hinzufügen, bis jeder Zustand genau eine ausgehende a -Kante und genau eine ausgehende b -Kante hat. Durch diese Konstruktion werden nichterreichbare Zustände aus der Potenzmengenkonstruktion ausgelassen.

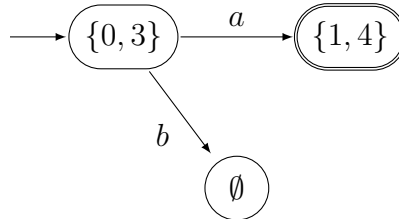
1. Schritt

Beginne die Zeichnung mit dem Startzustand $S = \{0, 3\}$.



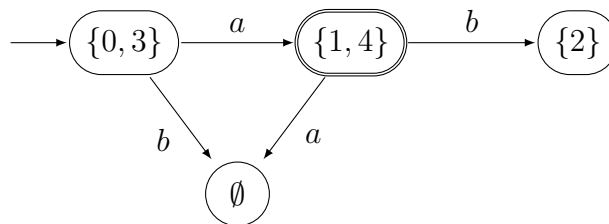
2. Schritt

Berechne $\delta'(\{0, 3\}, a) = \{1\} \cup \{4\} = \{1, 4\}$ und $\delta'(\{0, 3\}, b) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ und erweitere die Zeichnung um die neuen Zustände $\{1, 4\}$ und \emptyset und die zwei vom Zustand $\{0, 3\}$ ausgehenden Kanten.



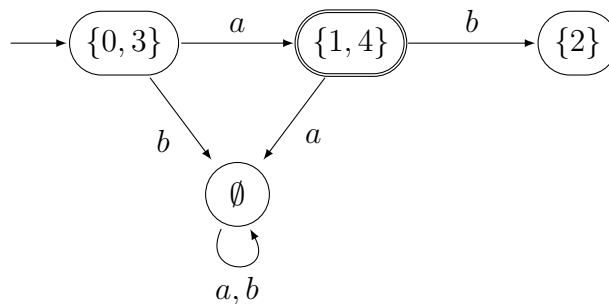
3. Schritt

Berechne $\delta'(\{1, 4\}, a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ und $\delta'(\{1, 4\}, b) = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$ und erweitere die Zeichnung um den neuen Zustand $\{2\}$ und die zwei vom Zustand $\{1, 4\}$ ausgehenden Kanten.



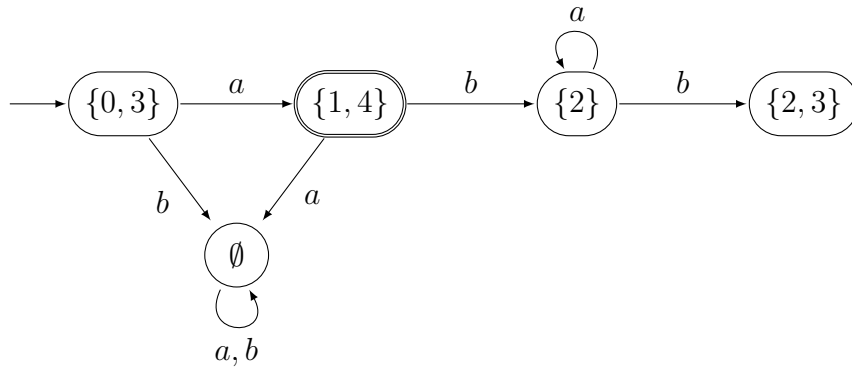
4. Schritt

Berechne $\delta'(\emptyset, a) = \emptyset$ und $\delta'(\emptyset, b) = \emptyset$ und erweitere die Zeichnung um die zwei vom Zustand \emptyset ausgehenden Kanten.



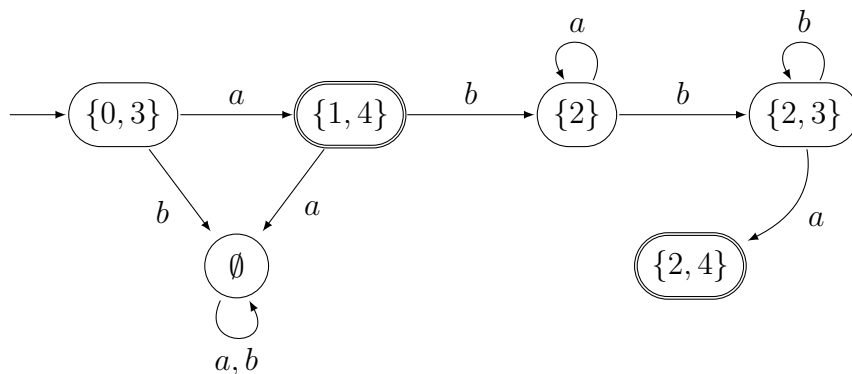
5. Schritt

Berechne $\delta'(\{2\}, a) = \{2\}$ und $\delta'(\{2\}, b) = \{2, 3\}$ und erweitere die Zeichnung um den neuen Zustand $\{2, 3\}$ und die zwei vom Zustand $\{2\}$ ausgehenden Kanten.



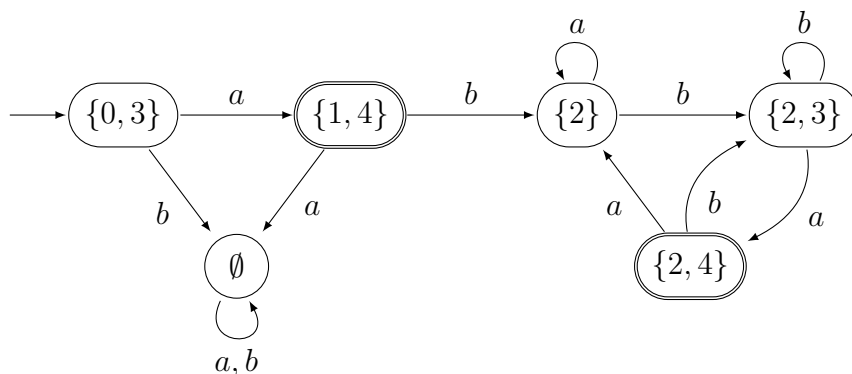
6. Schritt

Berechne $\delta'(\{2,3\}, a) = \{2\} \cup \{4\} = \{2,4\}$ und $\delta'(\{2,3\}, b) = \{2,3\} \cup \emptyset = \{2,3\}$ und erweitere die Zeichnung um den neuen Zustand $\{2,4\}$ und die zwei vom Zustand $\{2,3\}$ ausgehenden Kanten.



7. Schritt

Berechne $\delta'(\{2,4\}, a) = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$ und $\delta'(\{2,4\}, b) = \{2,3\} \cup \emptyset = \{2,3\}$ und erweitere die Zeichnung um die zwei vom Zustand $\{2,4\}$ ausgehenden Kanten.



Dies ist genau der DFA, der durch die Potenzmengenkonstruktion aus M entsteht, wenn man die nicht erreichbaren Zuständen weglässt.

Präsenzaufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Kartenspiel:

Zuerst notieren Sie auf ein Blatt Papier eine Folge von Anweisungen. Dann legt Ihr Gegner vier Spielkarten so auf den Tisch, dass diese einen Ring bilden. Dabei kann jede Spielkarte, unabhängig von den anderen, auf- oder zugedeckt liegen. Danach führt er nacheinander Ihre Anweisungen aus.

Mögliche Anweisungen sind:

- a*: Ihr Gegner dreht eine Karte um.
- b*: Ihr Gegner dreht zwei benachbarte Karten um.
- c*: Ihr Gegner dreht zwei nicht benachbarte Karten um.

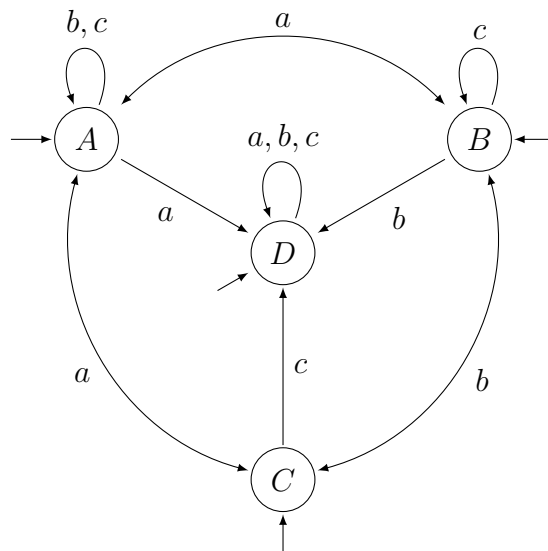
Sie gewinnen das Spiel, sobald alle vier Karten gleich liegen. In diesem Fall ignoriert der Gegner alle weiteren Anweisungen.

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel mit Sicherheit gewinnt?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe der Automatentheorie.

Lösung

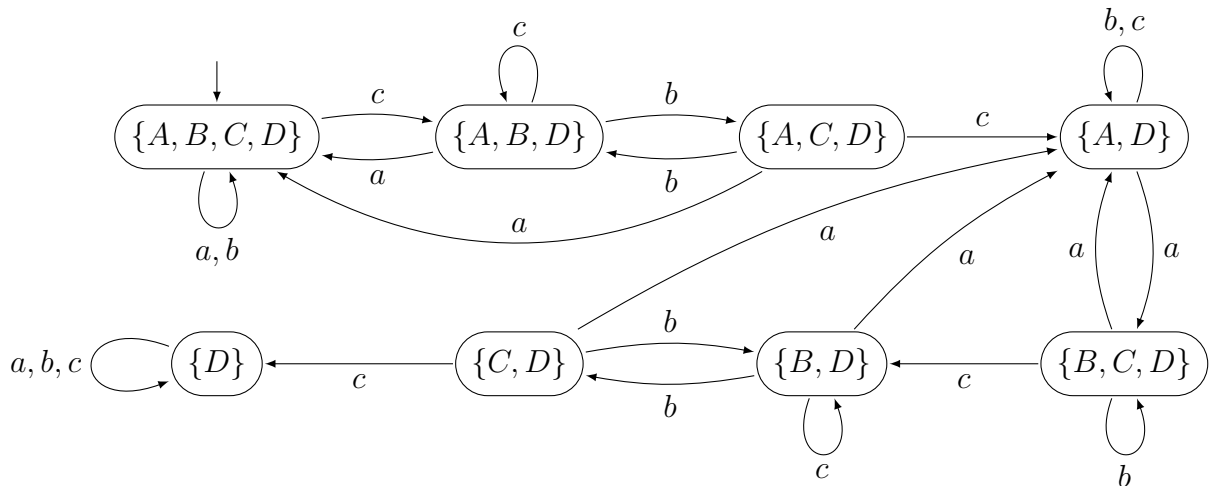
Das Spiel kann durch den folgenden NFA M modelliert werden:



Dabei haben die Zustände folgende Bedeutungen:

- A*: Genau drei Karten liegen gleich.
- B*: Zwei benachbarte Karten liegen gleich und die anderen zwei liegen andersrum.
- C*: Zwei nicht benachbarte Karten liegen gleich und die anderen zwei liegen andersrum.
- D*: Alle vier Karten liegen gleich.

Der dazugehörige Potenzmengenautomat (ohne unerreichbaren Zuständen) ist:



Da wir das Spiel mit Sicherheit gewinnen wollen (und nicht nur, falls der Gegenspieler schlecht spielt), sind wir nur an Wörtern interessiert, die vom Startzustand zum Zustand $\{D\}$ führen. Wählen wir ihn also als einzigen Endzustand, so erhalten wir einen DFA M' , der die Menge aller Folgen von Anweisungen akzeptiert, mit der wir mit Sicherheit das Spiel gewinnen.

Wir haben gezeigt, dass diese Menge eine reguläre Sprache ist und können nun leicht überprüfen, dass $cbcacbc$ das kürzeste Wort der Sprache ist.

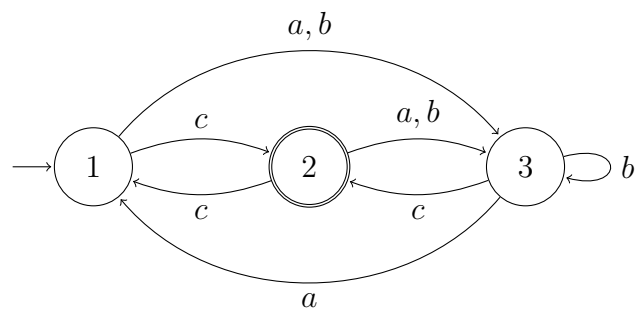
Präsenzaufgabe 3

Seien $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DFA und w ein Wort über dem Alphabet Σ . w heißt *synchronisierend* für M , falls gilt:

$$\exists q \in Q: \forall p \in Q: \hat{\delta}(p, w) = q.$$

Sei $\text{sync}(M)$ die Menge aller synchronisierenden Wörter für M .

1. Sei M der folgende DFA:



Welche der Wörter abc , aaa , $aacc$ und cab sind in $\text{sync}(M)$ enthalten?

2. Zeigen Sie, dass $\text{sync}(M)$ für jeden DFA M regulär ist.

Lösung

1. Es gilt $abc, aacc, cab \in \text{sync}(M)$ und $aaa \notin \text{sync}(M)$.
2. Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein beliebiger DEA. Wir zeigen die Regularität von $\text{sync}(M)$, indem wir einen DFA M' mit $T(M') = \text{sync}(M)$ konstruieren.

Konstruktion

Definiere analog zur Potenzmengenkonstruktion $M' = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, \delta', Q, F')$ mit

$$\delta'(P, a) = \{\delta(p, a) \mid p \in P\}$$

für alle $P \subseteq Q$ und alle $a \in \Sigma$ und $F' = \{\{q\} \mid q \in Q\}$.

Korrektheitsbeweis

Zu zeigen ist die Mengengleichung

$$T(M') = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q: \forall p \in Q: \hat{\delta}(p, w) = q \right\}. \quad (*)$$

Als Erstes zeigen wir für alle $w \in \Sigma^*$ die Gleichung

$$\hat{\delta}'(Q, w) = \left\{ \hat{\delta}(p, w) \mid p \in Q \right\}.$$

Dies tun wir mit Induktion nach der Wortlänge von w , d. h. wir zeigen

$$\forall \ell \geq 0: \underbrace{\forall w \in \Sigma^\ell: \hat{\delta}'(Q, w) = \left\{ \hat{\delta}(p, w) \mid p \in Q \right\}}_{A(\ell)}$$

mit vollständiger Induktion nach ℓ .

Induktionsanfang

Für $\ell = 0$ gilt $w = \varepsilon$ und somit

$$\hat{\delta}'(Q, \varepsilon) = Q = \{p \mid p \in Q\} = \left\{ \hat{\delta}(p, \varepsilon) \mid p \in Q \right\}.$$

Induktionsschritt

Sei $\ell \geq 0$ beliebig. Nach Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass jedes $w \in \Sigma^\ell$ die Gleichung

$$\hat{\delta}'(Q, w) = \left\{ \hat{\delta}(p, w) \mid p \in Q \right\}$$

erfüllt. Sei nun $w' \in \Sigma^{\ell+1}$ beliebig. Dann ist w' von der Form $w' = aw$ für ein

$w \in \Sigma^\ell$ und ein $a \in \Sigma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}'(Q, w') &= \hat{\delta}'(Q, aw) \\
 &= \hat{\delta}'(\delta'(Q, a), w) \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} \left\{ \hat{\delta}(p, w) \mid p \in \delta'(Q, a) \right\} \\
 &= \left\{ \hat{\delta}(p, w) \mid p \in \{\delta(p', a) \mid p' \in Q\} \right\} \\
 &= \left\{ \hat{\delta}(\delta(p', a), w) \mid p' \in Q \right\} \\
 &= \left\{ \hat{\delta}(p', aw) \mid p' \in Q \right\} \\
 &= \left\{ \hat{\delta}(p', w') \mid p' \in Q \right\}.
 \end{aligned}$$

Für den Beweis der obigen Mengengleichung (*) sei $w \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 w \in T(M') &\iff \hat{\delta}'(Q, w) \in F' \\
 &\iff \exists q \in Q: \hat{\delta}'(Q, w) = \{q\} \\
 &\stackrel{(*)}{\iff} \exists q \in Q: \underbrace{\left\{ \hat{\delta}(p, w) \mid p \in Q \right\}}_{\forall p \in Q: \hat{\delta}(p, w) = q} = \{q\}.
 \end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 4

[Bitte Hinweis in der Musterlösung beachten!]

Seien Σ ein Alphabet und L eine Sprache über Σ .

1. Zeigen Sie für jeden DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der L akzeptiert:

$$\forall x, y \in \Sigma^*: \hat{\delta}(s, x) = \hat{\delta}(s, y) \implies \forall w \in \Sigma^*: (xw \in L \iff yw \in L).$$

2. Die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq |w|_b\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ ist nicht regulär.

- (a) Skizzieren Sie einen (unendlichen) Automaten, der L akzeptiert.
- (b) Begründen Sie anhand von Teilaufgabe 1 kurz, warum L nicht regulär sein kann.

Lösung

Hinweis: Obwohl ich in der Ergänzung gesagt habe, dass ich diese Aufgabe entfernen würde, habe ich mich doch dagegen entschieden. Ich habe die Lösung etwas intuitiver und weniger formal gemacht in der Hoffnung, dass sie den Einstieg in das Thema *Satz von Myhill-Nerode und minimale DFAs* doch erleichtert. In Teilaufgabe 1 soll gezeigt werden, dass die in der Vorlesung eingeführte Äquivalenzrelation R_M auf Σ^* mit

$$x R_M y :\iff \hat{\delta}(s, x) = \hat{\delta}(s, y)$$

eine so genannte *Verfeinerung* von der Äquivalenzrelation R_L auf Σ^* mit

$$x R_L y :\iff \forall w \in \Sigma^*: (xw \in L \iff yw \in L)$$

ist. Äquivalent zu dieser Aussage ist die Kontraposition

$$\forall x, y \in \Sigma^*: (\exists w \in \Sigma^*: (xw \in L \not\iff yw \in L) \implies \hat{\delta}(s, x) \neq \hat{\delta}(s, y)).$$

Falls also ein Wort w existiert, sodass genau eins der Wörter xw und yw in L enthalten ist (und das andere nicht!), dann kann M nicht von sowohl x als auch von y vom Startzustand zum selben Zustand überführt werden. Diese Tatsache wird in Teilaufgabe 2 benutzt, um zu zeigen, dass jeder deterministische Automat, der L akzeptiert, unendlich viele Zustände hat und somit kein DFA ist.

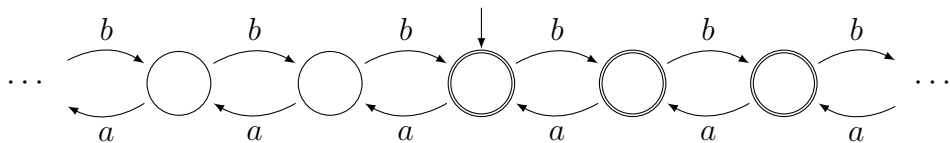
1. Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $\hat{\delta}(s, x) = \hat{\delta}(s, y)$. Dann gilt für ein beliebiges $w \in \Sigma^*$ die Gleichung

$$\hat{\delta}(s, xw) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, x), w) \stackrel{\text{Ann.}}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, y), w) = \hat{\delta}(s, yw)$$

und somit

$$\begin{aligned} xw \in L &\iff xw \in T(M) \\ &\iff \hat{\delta}(s, xw) \in F \\ &\iff \hat{\delta}(s, yw) \in F \\ &\iff yw \in T(M) \\ &\iff yw \in L. \end{aligned}$$

2. (a)



- (b) Wäre L regulär, dann müsste es einen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ für L geben. Insbesondere müsste Q endlich sein.

Für beliebige $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ existiert jedoch ein $w \in \Sigma^*$ (z. B. $w = b^i$) mit $a^i w \in L$, aber $a^j w \notin L$. Nach Teilaufgabe 1 wäre also $\hat{\delta}(s, a^i) \neq \hat{\delta}(s, a^j)$. Somit wären die Elemente

$$\hat{\delta}(s, \varepsilon), \hat{\delta}(s, a), \hat{\delta}(s, aa), \hat{\delta}(s, aaa), \hat{\delta}(s, aaaa), \hat{\delta}(s, aaaaa), \dots$$

alle paarweise verschieden, d. h. $\{\hat{\delta}(s, a^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ wäre eine unendliche Menge. Wegen $\hat{\delta}(s, w) \in Q$ für alle $w \in \Sigma^*$, wäre diese Menge eine Teilmenge von Q , was dazu führte, dass Q ebenfalls unendlich wäre.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel aus Präsenzaufgabe 2 mit Sicherheit gewinnt, wenn das Spiel mit 3 bzw. 5 statt 4 Karten gespielt wird?

Knobelaufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Kartenspiel:

Zuerst notieren Sie auf ein Blatt Papier eine Folge von Anweisungen. Dann legt Ihr Gegner drei Spielkarten nebeneinander auf den Tisch, jeweils auf- oder zugedeckt, und führt nacheinander Ihre Anweisungen aus.

Mögliche Anweisungen sind:

- a*: Ihr Gegner dreht alle drei Karten um.
- b*: Ihr Gegner dreht zwei benachbarte Karten um.
- c*: Ihr Gegner dreht zwei nicht benachbarte Karten um.

Sie gewinnen das Spiel, sobald alle drei Karten aufgedeckt sind. In diesem Fall ignoriert der Gegner alle weiteren Anweisungen.

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel mit Sicherheit gewinnt?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe der Automatentheorie.

Knobelaufgabe 3

Die *Černý-Vermutung* besagt, dass $(n-1)^2$ eine obere Schranke für die Länge des kürzesten synchronisierenden Wortes eines DFA mit n Zuständen ist (vgl. Präsenzaufgabe 3). Sie wurde 1964 vom Mathematiker Jan Černý aufgestellt und ist bis heute ein offenes Problem der theoretischen Informatik.

Falls $(n-1)^2$ tatsächlich eine obere Schranke ist, kann man zeigen, dass diese *scharf* ist, indem man für jedes $n \geq 1$ einen DFA mit n Zuständen angibt, bei dem das kürzeste synchronisierende Wort genau die Länge $(n-1)^2$ hat.

Geben Sie einen DFA M mit $n = 3$ Zuständen an, sodass das kürzeste synchronisierende Wort w bezüglich M genau die Länge $(n-1)^2 = 4$ besitzt. Wie sieht dann w aus? Lässt sich diese Konstruktion für ein beliebiges n verallgemeinern?