Lösungsblatt 8

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Das Pumping-Lemma besagt, dass jede reguläre Sprache L über einem Alphabet Σ eine gewisse Eigenschaft $P(L)$ besitzt. Intuitiv besagt $P(L)$, dass jedes Wort aus L, das lang genug ist, sich am Anfang des Wortes beliebig auf- und abpumpen lässt, ohne die Sprache zu verlassen.

Formal hat $P(L)$ die Form:

$$\boxed{}\, n \in \mathbb{N}\colon \boxed{}\, x \in L\colon \Big(|x| \geq n \boxed{} \boxed{}\, u,v,w \in \Sigma^*\colon$$
$$\big(x = uvw \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \boxed{} \boxed{}\, i \in \mathbb{N}\colon uv^iw \boxed{} L\big)\Big)$$

1. Füllen Sie die leeren Felder so mit den Symbolen $\exists$, $\forall$, $\Longrightarrow$, $\wedge$, $\in$ und $\notin$ aus, dass die entstehende Aussage äquivalent zur
   (a) Eigenschaft $P(L)$ ist.
   (b) Negation $\neg P(L)$ der Eigenschaft $P(L)$ ist.
2. Kann man etwas über die Regularität einer Sprache L sagen, wenn $P(L)$
   (a) gilt?
   (b) nicht gilt?

Lösung

Die Aussage des Pumping-Lemmas ist, dass für jede reguläre Sprache L ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $x = uvw$, $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$ existieren, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ das Wort uv^iw in L enthalten ist.

1. (a) $P(L)$ ist äquivalent zu:

$$\boxed{\exists}\, n \in \mathbb{N}\colon \boxed{\forall}\, x \in L\colon \Big(|x| \geq n \boxed{\Longrightarrow} \boxed{\exists}\, u,v,w \in \Sigma^*\colon$$
$$\big(x = uvw \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \boxed{\wedge} \boxed{\forall}\, i \in \mathbb{N}\colon uv^iw \boxed{\in} L\big)\Big)$$

   (b) $\neg P(L)$ ist äquivalent zu:

$$\boxed{\forall}\, n \in \mathbb{N}\colon \boxed{\exists}\, x \in L\colon \Big(|x| \geq n \boxed{\wedge} \boxed{\forall}\, u,v,w \in \Sigma^*\colon$$
$$\big(x = uvw \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \boxed{\Longrightarrow} \boxed{\exists}\, i \in \mathbb{N}\colon uv^iw \boxed{\notin} L\big)\Big)$$

2. (a) Nein. Jede reguläre Sprache L erfüllt $P(L)$, aber es gibt auch nichtreguläre Sprachen, die das tun. Beispielsweise erfüllt die Sprache

$$L = \left\{ a^k b^\ell c^m \;\middle|\; k = 0 \lor \ell = m \right\}$$

über $\Sigma = \{a, b, c\}$ die Aussage $P(L)$, obwohl sie nicht regulär ist.

   (b) Ja. L ist mit Sicherheit nicht regulär.

Vorbereitungsaufgabe 2

Eine binäre Relation $\sim$ auf einer Menge S heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie (1) *reflexiv*, (2) *symmetrisch* und (3) *transitiv* ist, d. h.:

(1) $\forall x \in S\colon x \sim x$

(2) $\forall x, y \in S\colon (x \sim y \implies y \sim x)$

(3) $\forall x, y, z \in S\colon ((x \sim y \land y \sim z) \implies x \sim z)$

Sei Σ ein Alphabet. Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen auf Σ^* und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists m, n \geq 1\colon x^m = y^n$
2. $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists w \in \Sigma^*\colon wx = y^2$

Lösung

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Beweis:

   Reflexivität

   Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Wähle $m = n \geq 1$ beliebig (z. B. $m = n = 1$). Dann gilt $x^m = x^n$.

   Symmetrie

   Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \sim y$. Dann existieren $m, n \geq 1$ mit $x^m = y^n$. Wähle $m' = n$ und $n' = m$. Dann sind $m', n' \geq 1$ und es gilt: $y^{m'} = y^n = x^m = x^{n'}$. Somit ist $y \sim x$.

   Transitivität

   Seien $x, y, z \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren Zahlen $m, m', n, n' \geq 1$ mit $x^m = y^n$ und $x^{m'} = y^{n'}$. Wähle $m'' = m \cdot m'$ und $n'' = n \cdot n'$. Dann sind $m'', n'' \geq 1$ und es gilt:

   $$x^{m''} = x^{m \cdot m'} = (x^m)^{m'} = (y^n)^{m'} = (y^{m'})^n = (z^{n'})^n = z^{n \cdot n'} = z^{n''}.$$

   Somit ist $x \sim z$.

2. $\sim$ ist zwar reflexiv (man wählt $w = x$), aber weder symmetrisch (da z. B. $\varepsilon \sim a$ und $a \not\sim \varepsilon$) noch transitiv (da z. B. $aaa \sim aa$, $aa \sim a$ und $aaa \not\sim a$) und somit keine Äquivalenzrelation.

Vorbereitungsaufgabe 3

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S und x ein beliebiges Element aus S, dann heißt $[x]_\sim := \{y \in S \mid x \sim y\}$ die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich $\sim$. Für beliebige $x, y \in S$ gilt dann:

$$x \sim y \iff [x]_\sim = [y]_\sim.$$

Die Menge $S/{\sim} := \{[x]_\sim \mid x \in S\}$ aller Äquivalenzklassen heißt *Quotientenmenge* oder *Faktormenge* und bildet eine *Partition* von S, d. h. jedes Element aus S ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Die Mächtigkeit $|S/{\sim}|$ der Quotientenmenge wird *Index* von $\sim$ genannt und gelegentlich mit Index($\sim$) notiert.

Eine Menge $R \subseteq S$ heißt *Repräsentanten-* oder *Vertretersystem* von $\sim$, wenn sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält, d. h. wenn $|R \cap [x]_\sim| = 1$ für alle $x \in S$ gilt. Für jedes Repräsentantensystem R von $\sim$ gilt dann:

$$S/{\sim} = \{[x]_\sim \mid x \in R\}.$$

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben seien folgende Äquivalenzrelationen auf Σ^*:

1. $x \sim y :\iff |x|_a \equiv |y|_a \mod 3$
2. $x \sim y :\iff |x| = |y|$
3. $x \sim y :\iff |x|_a + |y|_b = |y|_a + |x|_b$

Geben Sie zu jeder Äquivalenzrelation folgendes an:

(a) ein Repräsentantensystem R

(b) die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ von jedem $x \in R$

(c) die Quotientenmenge $\Sigma^*/{\sim}$

(d) der Index $|\Sigma^*/{\sim}|$

Lösung

Eine Äquivalenzrelation kann im Allgemeinen mehrere Repräsentantensysteme haben. Für jede der obigen Äquivalenzrelationen wird hier dasjenige Repräsentantensystem gewählt, das von jeder Äquivalenzklasse das *längenlexikografisch* kleinste Element enthält.

1. (a) Mögliches Repräsentantensystem: $R = \{\varepsilon, a, aa\}$

   (b) Äquivalenzklassen:

   - $[\varepsilon]_\sim = \{\varepsilon, a^3, a^6, a^9, \dots\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \mod 3\}$
   - $[a]_\sim = \{a, a^4, a^7, a^{10}, \dots\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 1 \mod 3\}$
   - $[aa]_\sim = \{a^2, a^5, a^8, a^{11}, \dots\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 2 \mod 3\}$

   (c) Quotientenmenge: $\Sigma^*/{\sim} = \{[\varepsilon]_\sim, [a]_\sim, [aa]_\sim\}$

   (d) Index: $|\Sigma^*/{\sim}| = 3$.

2. (a) Mögliches Repräsentantensystem: $R = \{\varepsilon, a, aa, \dots\} = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) Äquivalenzklassen: $[a^n]_\sim = \Sigma^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(c) Quotientenmenge: $\Sigma^*/\!\sim\; = \{[a^n]_\sim \mid n \in \mathbb{N}\}$

(d) Index: $|\Sigma^*/\!\sim\!| = \infty$.

3. (a) Mögliches Repräsentantensystem:

$$R = \{\dots, bb, b, \varepsilon, a, aa, \dots\} = \{x^n \mid x \in \Sigma \wedge n \in \mathbb{N}\}\,.$$

(b) Äquivalenzklassen:

- $[\varepsilon]_\sim = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
- $[a^n]_\sim = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a - |w|_b = n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $[b^n]_\sim = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b - |w|_a = n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(c) Quotientenmenge: $\Sigma^*/\!\sim\; = \{[x^n]_\sim \mid x \in \Sigma \wedge n \in \mathbb{N}\}$

(d) Index: $|\Sigma^*/\!\sim\!| = \infty$.

Vorbereitungsaufgabe 4

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ, $x, y \in \Sigma^*$ zwei beliebige Wörter und R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz. Füllen Sie die leeren Felder so mit den Symbolen $\exists$, $\forall$, $\in$ und $\notin$ aus, dass die entstehende Aussagen wahr sind. Dabei besagt $x \not R_L\, y$, dass $x\, R_L\, y$ nicht gilt, d. h. dass x und y nicht in Relation bezüglich R_L stehen.

1. $x\, R_L\, y \iff \boxed{}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{}\, L \iff yw \boxed{}\, L\Big)$
2. $x \not R_L\, y \iff \boxed{}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{}\, L \iff yw \boxed{}\, L\Big)$

Lösung

1. Es gibt zwei mögliche Lösungen:

$$\begin{aligned} x\, R_L\, y &\iff \boxed{\forall}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{\in} L \iff yw \boxed{\in} L\Big) \\ &\iff \boxed{\forall}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{\notin} L \iff yw \boxed{\notin} L\Big) \end{aligned}$$

2. Es gibt zwei mögliche Lösungen:

$$\begin{aligned} x \not R_L\, y &\iff \boxed{\exists}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{\in} L \iff yw \boxed{\notin} L\Big) \\ &\iff \boxed{\exists}\, w \in \Sigma^* \colon \Big(xw \boxed{\notin} L \iff yw \boxed{\in} L\Big) \end{aligned}$$

Hinweis: Man nennt dann w einen *Zeugen* für die Inäquivalenz von x und y.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass keine der folgenden Sprachen L über dem entsprechenden Alphabet Σ regulär ist.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$
2. $L = \left\{a^{3^k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$, $\Sigma = \{a\}$
3. $L = \left\{a^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} b^\ell c^k \,\middle|\, k, \ell \in \mathbb{N}\right\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

Lösung

Wir zeigen für jede Sprache L, dass sie die Eigenschaft des Pumping-Lemmas nicht besitzt und somit nicht regulär sein kann (siehe Vorbereitungsaufgabe 1).

Formal zeigen wir also:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \exists x \in L\colon \Big(|x| \geq n \wedge \forall u, v, w \in \Sigma^*\colon \big(x = uvw \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \\ \implies \exists i \in \mathbb{N}\colon uv^iw \notin L\big)\Big).$$

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n b^n$. Dann ist $x \in L$ mit $|x| = 2n \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wegen (1) und (2) ist $v = a^j$ für ein $j \leq n$. Wegen (3) ist $j \geq 1$. Für $i = 0$ ist $uv^iw \notin L$, da

   $$|uv^0w|_a = |uw|_a = n - j < n = |uw|_b = |uv^0w|_b.$$

   Hinweis: Man hätte hier $i \neq 1$ beliebig wählen können. Die Anzahl der as in uv^iw ist $n + (i-1)j$ und die Anzahl der bs in uv^iw ist n. Diese Werte sind für alle $i \neq 1$ ungleich.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{3^n}$. Dann ist $x \in L$ mit $|x| = 3^n \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wegen (1) und (2) ist $v = a^j$ für ein $j \leq n$. Wegen (3) ist $j \geq 1$. Für $i = 2$ ist $uv^iw = uvvw = a^{3^n+j}$. Wegen

   $$3^n < 3^n + 1 \leq 3^n + j \leq 3^n + n \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

   liegt $3^n + j$ echt zwischen 3^n und 3^{n+1}. Da die Folge der Dreierpotenzen $(3^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$ monoton wachsend ist, kann $3^n - j$ keine Dreierpotenz sein, d. h. $uv^iw \notin L$.

   Hinweise:

   - An zwei Stellen wurde die Ungleichung $3^n \geq n$ benutzt. Diese kann für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion gezeigt werden:

     <u>Induktionsanfang</u>

     Es gilt $3^0 = 1 \geq 0$.

     <u>Induktionsschritt</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Induktionsvoraussetzung (IV) gilt $3^n \geq n$. Daraus folgt:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 2 \cdot 3^n = 3^n + 3^n \overset{\text{IV}}{\geq} n + 3^n \geq n + 1.$$

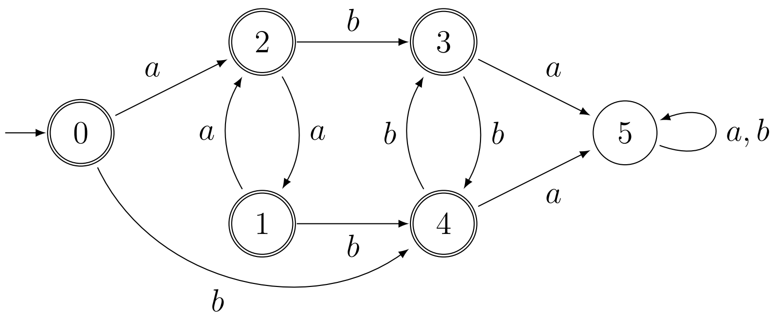
- Man hätte hier $i = 0$ oder $2 \leq i \leq 6$ wählen können. Die Länge von uv^iw ist $3^n + (i-1)j$. Für $i = 0$ liegt diese echt zwischen 3^{n-1} und 3^n und für $2 \leq i \leq 6$ echt zwischen 3^n und 3^{n+1}.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n c^{n^2}$. Dann ist $x \in L$ mit $|x| = n + n^2 \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wegen (1) und (2) ist $v = a^j$ für ein $j \leq n$. Wegen (3) ist $j \geq 1$. Für $i = 0$ ist $uv^iw \notin L$, da $uv^iw = a^{n-j}c^{n^2}$ mit $n - j < n = \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor$ ist.

   Hinweis: Man hätte hier $i \neq 1$ beliebig wählen können. uv^iw hat die Form $uv^iw = a^{n+(i-1)j}c^{n^2}$ und die Gleichung $n + (i-1)j = \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor$ ist nur für $i = 1$ erfüllt.

Präsenzaufgabe 2

Sei M der folgende DFA und L die von M akzeptierte Sprache.



1. Geben Sie L an.
2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

   (a) $aab\,R_L\,abb$ (c) $bab\,R_L\,aba$ (e) $\varepsilon\,R_L\,aa$

   (b) $ab\,R_L\,ba$ (d) $\varepsilon\,R_L\,bba$ (f) $bb\,R_L\,\varepsilon$

3. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Myhill-Nerode-Relation R_L an.
4. Geben Sie den Myhill-Nerode-Automat grafisch an.
5. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Relation R_M an.

Lösung

1. $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
2. (a) Wahr.

   Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $aabw \in L \iff w \in \{b\}^* \iff abbw \in L$.

(b) Falsch.

Für $w = \varepsilon$ gilt $abw = ab \in L$ und $baw = ba \notin L$.

(c) Wahr.

Für alle $w \in \Sigma^*$ sind die Aussagen $babw \in L$ und $abaw \in L$ beide falsch und somit äquivalent.

(d) Falsch.

Für $w = \varepsilon$ gilt $\varepsilon w = \varepsilon \in L$ und $bbaw = bba \notin L$.

(e) Wahr.

Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $\varepsilon w \in L \iff w \in L \iff aaw \in L$.

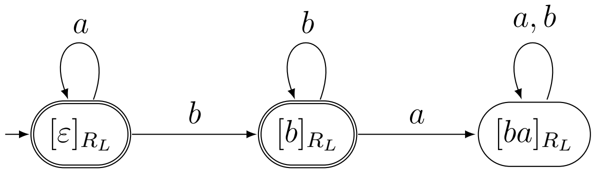
(f) Falsch. Für $w = a$ gilt $bbw = bba \notin L$ und $\varepsilon w = a \in L$.

3. $\Sigma^*/R_L = \{[\varepsilon]_{R_L}, [b]_{R_L}, [ba]_{R_L}\}$ mit

- $[\varepsilon]_{R_L} = \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$,
- $[b]_{R_L} = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N} \land n \geq 1\}$ und
- $[ba]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid ba \text{ ist Infix von } w\}$,

d. h. $\text{Index}(R_L) = |\Sigma^*/R_L| = 3$.

4.



5. $\Sigma^*/R_M = \{[\varepsilon]_{R_M}, [a]_{R_M}, [aa]_{R_M}, [b]_{R_M}, [bb]_{R_M}, [ba]_{R_M}\}$ mit

- $[\varepsilon]_{R_M} = \{\varepsilon\}$,
- $[a]_{R_M} = \{a^m \mid m \text{ ungerade}\}$,
- $[aa]_{R_M} = \{a^m \mid m \geq 1 \land m \text{ gerade}\}$,
- $[b]_{R_M} = \{a^m b^n \mid n \geq 1 \land m + n \text{ ungerade}\}$,
- $[bb]_{R_M} = \{a^m b^n \mid n \geq 1 \land m + n \text{ gerade}\}$ und
- $[ba]_{R_M} = \{w \in \Sigma^* \mid ba \text{ ist Infix von } w\}$,

d. h. $\text{Index}(R_M) = |\Sigma^*/R_M| = 6$.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

In Präsenzaufgabe 2 aus Ergänzungsblatt 7 haben wir eine kontextfreie Grammatik für die Menge $\mathrm{RE}(\Sigma)$ aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ angegeben. Zeigen Sie, dass $\mathrm{RE}(\Sigma)$ für kein Alphabet Σ regulär ist.

Hinweis: Da Alphabete nichtleer sind, kann von der Existenz eines Buchstaben $a \in \Sigma$ ausgegangen werden.

Knobelaufgabe 2

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf Σ^* mit

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists u, v \in \Sigma^* \colon x = uv \wedge y = vu$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Knobelaufgabe 3

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \left\{ a^k b^\ell \,\middle|\, \mathrm{ggT}(k, \ell) = 1 \right\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht regulär ist.

Hinweis: $\mathrm{ggT}(k, \ell)$ ist der *größte gemeinsame Teiler* von k und ℓ mit $\mathrm{ggT}(k, 0) = k$ und $\mathrm{ggT}(k, 1) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $\mathrm{ggT}(k, \ell) = 1$ besagt also, dass k und ℓ *teilerfremd* sind.