Lösungsblatt 10

Vorbereitungsaufgaben

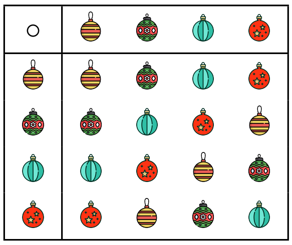
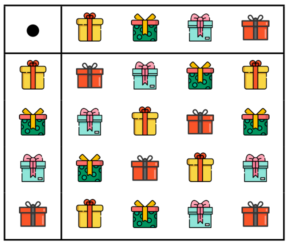
Vorbereitungsaufgabe 1

Seien $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ zwei Monoide mit neutralen Elementen 1_M und 1_N. Eine Funktion $\varphi\colon M \to N$ heißt *Monoid-Homomorphismus* von $(M, \circ)$ auf $(N, \bullet)$, wenn gilt:

$$\varphi(1_M) = 1_N \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in M\colon \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y).$$

Wenn klar ist, dass es sich bei $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ um Monoide handelt, nennen wir φ auch einfach *Homomorphismus*.

1. Seien $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ zwei Monoide mit $M = \{$, , , $\}$, $N = \{$, , , $\}$ und folgenden Verknüpfungstafeln:

   Es existiert genau ein Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ mit $\varphi($$) =$ . Geben Sie diesen an.

   Tipp: Was wissen wir über $\varphi($ $\circ$ $)$, $\varphi($ $\circ$ $)$ und $\varphi($ $\circ$ $)$?

2. Geben Sie einen Homomorphismus ψ von $(\mathbb{N}, +)$ auf $(\mathbb{N}, \cdot)$ an.

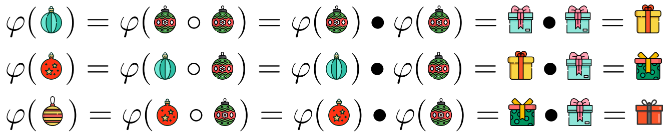
3. Geben Sie einen Homomorphismus χ von $(\{$, $\}^*, \cdot)$ auf $(\mathbb{N}, +)$ an.

4. Seien $(A, \circ_A)$, $(B, \circ_B)$ und $(C, \circ_C)$ drei Monoide und $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ zwei Homomorphismen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\chi\colon A \to C$ mit $\chi(x) = \psi(\varphi(x))$ wieder ein Homomorphismus ist.

   Bemerkung: Man schreibt dann $\chi = \psi \circ \varphi$ („ψ nach φ") und nennt χ die *Komposition* von φ und ψ.

Lösung

1. Mit $\varphi(\ ) = $ erhalten wir:



Somit ist der gesuchte Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ mit $\varphi(\ ) = $, $\varphi(\ ) = $, $\varphi(\ ) = $ und $\varphi(\ ) = $.

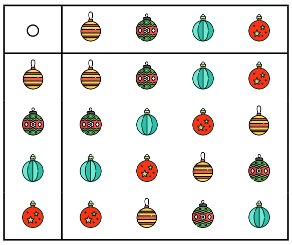
Bemerkungen:

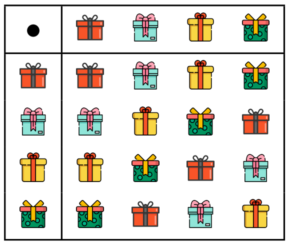
- Wir erkennen, dass das neutrale Element , wie erwartet, auf das neutrale Element abgebildet wird. Um zu überprüfen, dass es sich bei φ tatsächlich um einen Homomorphismus handelt, sollte noch die Gleichung

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$$

für alle 16 Tupel $(x, y) \in M \times M$ überprüft werden. Dies ersparen wir uns, da wir aus der Aufgabenstellung wissen, dass ein solcher Homomorphismus existiert und aus den obigen Rechnungen folgt, dass nur diese Funktion als Homomorphismus infrage kommt.

- Ändert man die Reihenfolge der Elemente in der Verknüpfungstafel von $(N, \bullet)$, so erkennt man die intuitive Bedeutung eines Homomorphismus:





Die zwei Monoide haben dieselbe Struktur. Sie sind also bis auf Umbenennung der Elemente genau gleich. Der Homomorphismus stellt genau diese Umbenennung dar.

2. Wähle beispielsweise $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\psi(n) = 2^n$. Dann gilt $\psi(0) = 2^0 = 1$ und

$$\psi(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = \psi(x) \cdot \psi(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Für jedes $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\psi(n) = b^n$ ein Homomorphismus. Für $b = 1$ erhält man den trivialen Homomorphismus $\psi(n) = 1$. Ein Homomorphismus heißt *trivial*, wenn er jedes Element der Definitionsmenge auf das neutrale Element der Zielmenge abbildet.

3. Wähle beispielsweise $\chi\colon \{\ ,\ \}^* \to \mathbb{N}$ mit $\chi(w) = |w|$. Dann gilt $\chi(\varepsilon) = |\varepsilon| = 0$ und

$$\chi(x \cdot y) = \chi(xy) = |xy| = |x| + |y| = \chi(x) + \chi(y)$$

für alle $x, y \in \{$🎄, ⛄$\}^*$.

Bemerkung: Andere Möglichkeiten sind $\chi(w) = |w|_{🎄}$, $\chi(w) = |w|_{⛄}$ und der triviale Homomorphismus $\chi(w) = 0$. Deutlich allgemeiner, aber dafür deutlich unintuitiver, ist auch $\chi(w) = k|w|_{🎄} + \ell|w|_{⛄}$ für beliebige $k, \ell \in \mathbb{N}$ ein Homomorphismus. Die oben genannten Möglichkeiten sind Spezialfälle davon für $(k, \ell) \in \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$.

4. Da φ und ψ Homomorphismen sind, gilt:

   (1) $\varphi(1_A) = 1_B$

   (2) $\psi(1_B) = 1_C$

   (3) $\forall x, y \in A\colon \varphi(x \circ_A y) = \varphi(x) \circ_B \varphi(y)$

   (4) $\forall x, y \in B\colon \psi(x \circ_A y) = \psi(x) \circ_C \psi(y)$

   Zu zeigen ist

   $$\chi(1_A) = 1_C \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in A\colon \chi(x \circ_A y) = \chi(x) \circ_C \chi(y).$$

   Die erste Aussage zeigen wir mittels

   $$\chi(1_A) = \psi(\varphi(1_a)) \stackrel{(1)}{=} \psi(1_B) \stackrel{(2)}{=} 1_C.$$

   Für die zweite Aussage gehen wir von beliebigen Elementen $x, y \in A$ aus und folgern:

   $$\begin{aligned}\chi(x \circ_A y) &= \psi(\varphi(x \circ_A y))\\ &\stackrel{(3)}{=} \psi(\varphi(x) \circ_B \varphi(y))\\ &\stackrel{(4)}{=} \psi(\varphi(x)) \circ_C \psi(\varphi(y))\\ &= \chi(x) \circ_C \chi(y).\end{aligned}$$

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{$🎄, ⛄, 🍪$\}$ und $\Gamma = \{$🎅, 🦌$\}$ zwei Alphabete und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus vom freien Monoid $(\Sigma^*, \cdot)$ auf das freie Monoid $(\Gamma^*, \cdot)$, der durch $\varphi($🎄$) =$ 🦌, $\varphi($⛄$) =$ 🎅🎅🦌 und $\varphi($🍪$) =$ 🦌🎅🎅 definiert ist.

Hinweis: Ist Σ ein Alphabet und $\varphi\colon \Sigma^* \to M$ ein Homomorphismus vom freien Monoid $(\Sigma^*, \cdot)$ in ein beliebiges Monoid $(M, \circ)$, dann wird φ durch die Bilder der Werte aus Σ eindeutig bestimmt. Dann gilt nämlich für alle $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$:

$$\varphi(a_1 \ldots a_n) = \varphi(a_1) \circ \ldots \circ \varphi(a_n).$$

Aus diesem Grund kann φ durch Angabe der Werte $\varphi($🎄$)$, $\varphi($⛄$)$ und $\varphi($🍪$)$ eindeutig definiert werden.

1. Bestimmen Sie:

(a) $\varphi(\text{☃🎄🍪})$

(b) $\varphi(\varepsilon)$

(c) $\varphi(\{\text{🎄}^n\text{☃}^n\text{🍪}^n \mid n \in \mathbb{N}\})$

(d) $\varphi^{-1}(\text{🦌🎅🎅🦌🎅🎅🦌})$

(e) $\varphi^{-1}(\text{🎅🦌🎅})$

(f) $\varphi^{-1}(\{w \in \Gamma^* \mid |w|_{\text{🎅}} = |w|_{\text{🦌}}\})$

2. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Gilt $\varphi(\{\text{☃}, \text{🍪}\}^*) = \{w \in \Gamma^* \mid |w|_{\text{🎅}} = 2|w|_{\text{🦌}}\}$?

   (b) Ist $\varphi(L)$ für jede reguläre Sprache L über dem Alphabet Σ regulär?

Erinnerung: Für eine Funktion $f\colon A \to B$ und Mengen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ gilt

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(B') = \{x \mid f(x) \in B'\}.$$

Man nennt $f(A')$ das *Bild* von A' unter f und $f^{-1}(B')$ das *Urbild* von B' unter f. Hierbei sollte f^{-1} nicht mit der Umkehrfunktion einer Funktion f verwechselt werden. Diese wird zwar auch mit f^{-1} notiert, existiert jedoch nur, falls f bijektiv ist. Für jedes $y \in B$ gilt $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$.

Lösung

1. (a) $\varphi(\text{☃🎄🍪}) = \text{🎅🎅🦌🦌🦌🎅🎅}$

   (b) $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$

   (c) $\varphi(\{\text{🎄}^n\text{☃}^n\text{🍪}^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{\text{🦌}^n(\text{🎅🎅🦌})^n(\text{🦌🎅🎅})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

   (d) $\varphi^{-1}(\text{🦌🎅🎅🦌🎅🎅🦌}) = \{\text{🎄☃☃}, \text{🍪🎄☃}, \text{🍪🍪🎄}\}$

   (e) $\varphi^{-1}(\text{🎅🦌🎅}) = \emptyset$

   (f) $\varphi^{-1}(\{w \in \Gamma^* \mid |w|_{\text{🎅}} = |w|_{\text{🦌}}\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\text{🎄}} = |w|_{\text{☃}} + |w|_{\text{🍪}}\}$

2. (a) Nein. Es gilt zwar die Inklusion von links nach rechts, aber die umgekehrte Inklusion nicht. Beispielsweise ist $\text{🎄☃🎄} \in \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\text{🎄}} = 2|w|_{\text{☃}}\} \setminus \varphi(\{\text{☃}, \text{🍪}\}^*)$.

   (b) Ja. In Aufgabe 4 von Aufgabenblatt 3 wurde gezeigt, dass dis Klasse der regulären Sprachen unter Homomorphismen abgeschlossen sind, d. h. dass das Bild $\varphi(L)$ einer regulären Sprache L unter einem Homomorphismus φ immer regulär ist.

   Hinweis: Nicht verwirren lassen! Die dort verwendeten eckigen Klammern sind nur eine andere (erfundene) Notation für Homomorphismen. Ersetzt man in der Aufgabe $[\![\ldots]\!]$ durch $\varphi(\ldots)$ und w_{a_i} durch $\varphi(a_i)$, so erhält man genau die Definition eines Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$.

Vorbereitungsaufgabe 3

Seien $\Sigma = \{\text{🎄}, \text{☃}\}$ ein Alphabet und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion mit $\varphi(w) = \text{🎄}^{|w|_{\text{🎄}}}\text{☃}^{|w|_{\text{☃}}}$.

1. Bestimmen Sie:

(a) $\varphi(\text{🎄⛄⛄🎄⛄})$

(b) $\varphi(\text{🎄}^{15}\text{⛄}^{20}\text{🎄}^{25}\text{⛄}^{30})$

(c) $\varphi(\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\text{🎄}} = |w|_{\text{⛄}}\})$

(d) $\varphi^{-1}(\text{🎄🎄🎄⛄})$

(e) $\varphi^{-1}(\text{⛄🎄})$

(f) $\varphi^{-1}(\{\text{🎄}^m\text{⛄}^n \mid m, n \in \mathbb{N}\})$

2. Beantworten Sie folgende Fragen:
   (a) Ist φ ein Homomorphismus?
   (b) Ist $\varphi(L)$ für jede reguläre Sprache L über dem Alphabet Σ regulär?

Lösung

1. (a) $\varphi(\text{🎄⛄⛄🎄⛄}) = \text{🎄🎄⛄⛄⛄}$
   (b) $\varphi(\text{🎄}^{15}\text{⛄}^{20}\text{🎄}^{25}\text{⛄}^{30}) = \text{🎄}^{40}\text{⛄}^{50}$
   (c) $\varphi(\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\text{🎄}} = |w|_{\text{⛄}}\}) = \{\text{🎄}^n\text{⛄}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   (d) $\varphi^{-1}(\text{🎄🎄🎄⛄}) = \{\text{🎄🎄🎄⛄}, \text{🎄🎄⛄🎄}, \text{🎄⛄🎄🎄}, \text{⛄🎄🎄🎄}\}$
   (e) $\varphi^{-1}(\text{⛄🎄}) = \emptyset$
   (f) $\varphi^{-1}(\{\text{🎄}^m\text{⛄}^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}) = \Sigma^*$
2. (a) Nein. Es gilt zwar $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$ und $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ für einige $x, y \in \Sigma^*$, aber nicht für alle. Beispielsweise gilt für $x = \text{⛄}$ und $y = \text{🎄⛄}$:
   $$\varphi(xy) = \varphi(\text{⛄🎄⛄}) = \text{🎄⛄⛄} \neq \text{⛄🎄⛄} = \varphi(\text{⛄})\varphi(\text{🎄⛄}) = \varphi(x)\varphi(y).$$
   (b) Nein. $L((\text{🎄⛄})^*)$ ist regulär, aber $\varphi(L((\text{🎄⛄})^*)) = \{\text{🎄}^n\text{⛄}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht.

   Hinweis: Dass φ kein Homomorphismus ist, ist als Begründung nicht ausreichend, denn es gibt Funktionen (z. B. die Identitätsfunktion auf Σ^*), die zwar keine Homomorphismen sind, aber trotzdem reguläre Sprachen auf reguläre Sprachen abbilden.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Seien $(\Sigma^*, \cdot)$ das freie Monoid über dem Alphabet $\Sigma = \{\text{🎄}, \text{⛄}, \text{🍪}\}$ mit der Konkatenation von Wörtern als Verknüpfung und $(M, \cdot)$ ein Monoid mit der Trägermenge $M = \{-1, 0, 1\}$ und der gewöhnlichen Multiplikation auf Zahlen als Verknüpfung.

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to M$, der durch $\varphi(\text{🎄}) = -1$, $\varphi(\text{⛄}) = 0$ und $\varphi(\text{🍪}) = 1$ eindeutig definiert ist.

1. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $(M, \cdot)$ an. Warum ist $(M, \cdot)$ ein Monoid? Ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe?
2. Geben Sie eine Formel für $\varphi(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ an.
3. Welche Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ werden von $(M, \cdot)$ mit φ erkannt?

Lösung

1.

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

   $(M, \cdot)$ ist ein Monoid, da M unter $\cdot$ abgeschlossen ist (s. Verknüpfungstafel), $\cdot$ assoziativ ist und 1 ein neutrales Element ist.

   $(M, \cdot)$ ist keine Gruppe, da 0 kein Inverses besitzt.

2. Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\varphi(w) = \prod_{i=1}^{|w|} \varphi(w[i]) = \begin{cases} 0 & \text{für } |w|_{⛄} \geq 1 \\ (-1)^{|w|_{🎄}} & \text{für } |w|_{⛄} = 0. \end{cases}$$

3. Für jede Teilmenge A von M wird $L = \varphi^{-1}(A)$ von $(M, \cdot)$ mit φ erkannt. Weil M genau 8 Teilmengen besitzt, sind es genau folgende 8 Sprachen:

$$\begin{array}{ll}
\varphi^{-1}(\emptyset) & = \emptyset \\
\varphi^{-1}(\{-1\}) & = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{⛄} = 0 \wedge |w|_{🎄} \text{ ungerade}\} \\
\varphi^{-1}(\{0\}) & = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{⛄} \geq 1\} \\
\varphi^{-1}(\{1\}) & = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{⛄} = 0 \wedge |w|_{🎄} \text{ gerade}\} \\
\varphi^{-1}(\{-1, 0\}) & = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{⛄} \geq 1 \vee |w|_{🎄} \text{ ungerade}\} \\
\varphi^{-1}(\{-1, 1\}) & = \{🎄, 🍪\}^* \\
\varphi^{-1}(\{0, 1\}) & = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{⛄} \geq 1 \vee |w|_{🎄} \text{ gerade}\} \\
\varphi^{-1}(M) & = \Sigma^*
\end{array}$$

Präsenzaufgabe 2

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ, R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz bezüglich L und $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz bezüglich L. Bekanntlich sind R_L und $\equiv_L$ Äquivalenzrelationen.

1. Für diese Teilaufgabe seien $\Sigma = \{🎄, ⛄\}$ und $L = \{🎄^m ⛄^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Geben Sie Quotientenmenge und Index von $\equiv_L$ sowie die Verknüpfungstafel des syntaktischen Monoids $(\mathrm{Synt}(L), \cdot)$ an.
   (b) Zeigen Sie, dass R_L im Allgemeinen keine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\equiv_L$ eine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.
3. Warum ist die auf Folie 17.5 definierte Funktion $\varphi\colon \Sigma^* \to \mathrm{Synt}(L)$ mit $\varphi(w) = [w]_{\equiv_L}$ ein Monoid-Homomorphismus?

Erinnerung: $\mathrm{Synt}(L) = \Sigma^*/{\equiv_L}$.

Lösung

1. (a) Es gilt:

   - $[\varepsilon]_{\equiv_L} = \{\varepsilon\}$
   - $[🎄]_{\equiv_L} = \{🎄^m \mid m \geq 1\} = \{🎄\}^+$
   - $[⛄]_{\equiv_L} = \{⛄^n \mid n \geq 1\} = \{⛄\}^+$
   - $[🎄⛄]_{\equiv_L} = \{🎄^m⛄^n \mid m, n \geq 1\} = \{🎄\}^+\{⛄\}^+$
   - $[⛄🎄]_{\equiv_L} = \{u⛄🎄v \mid u, v \in \Sigma^*\} = \Sigma^*⛄🎄\Sigma^*$

   d. h. $\Sigma^*/{\equiv_L} = \{[\varepsilon]_{\equiv_L}, [🎄]_{\equiv_L}, [⛄]_{\equiv_L}, [🎄⛄]_{\equiv_L}, [⛄🎄]_{\equiv_L}\}$ mit $|\Sigma^*/{\equiv_L}| = 5$.

   Für die Verknüpfungstafel schreiben wir der Übersichtlichkeit halber vereinfacht nur $[w]$ statt $[w]_{\equiv_L}$.

$\cdot$	$[\varepsilon]$	$[🎄]$	$[⛄]$	$[🎄⛄]$	$[⛄🎄]$
$[\varepsilon]$	$[\varepsilon]$	$[🎄]$	$[⛄]$	$[🎄⛄]$	$[⛄🎄]$
$[🎄]$	$[🎄]$	$[🎄]$	$[🎄⛄]$	$[🎄⛄]$	$[⛄🎄]$
$[⛄]$	$[⛄]$	$[⛄🎄]$	$[⛄]$	$[⛄🎄]$	$[⛄🎄]$
$[🎄⛄]$	$[🎄⛄]$	$[⛄🎄]$	$[🎄⛄]$	$[⛄🎄]$	$[⛄🎄]$
$[⛄🎄]$	$[⛄🎄]$	$[⛄🎄]$	$[⛄🎄]$	$[⛄🎄]$	$[⛄🎄]$

   Beispielrechnung: $[🎄⛄] \cdot [🎄⛄] = [🎄⛄🎄⛄] = [⛄🎄]$.

   (b) Es gilt beispielsweise $⛄ \; R_L \; ⛄$ und $⛄ \; R_L \; 🎄⛄$, aber $⛄⛄ \; \not R_L \; ⛄🎄⛄$.

2. Seien $x, x'y, y' \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \equiv_L x'$ und $y \equiv_L y'$. Dann gilt für beliebige $u, u', v, v' \in \Sigma^*$:

   $$(1)\; uxv \in L \iff ux'v \in L \qquad \text{und} \qquad (2)\; uyv \in L \iff uy'v \in L.$$

   Zu zeigen ist $xy \equiv_L x'y'$. Seien nun $u'', v'' \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

   $$uxyv \in L \overset{(1)}{\iff} ux'yv \in L \overset{(2)}{\iff} ux'y'v \in L.$$

3. Weil $\varphi(\varepsilon) = [\varepsilon]_{\equiv_L}$ und

   $$\varphi(x \cdot y) = [x \cdot y]_{\equiv_L} = [x]_{\equiv_L} \cdot [y]_{\equiv_L} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

   für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt.

Präsenzaufgabe 3

Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache regulär ist.

Lösung

Sei $L = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine endliche Sprache. Dann wird L von dem regulären Ausdruck $\gamma = w_1 | \ldots | w_n$ beschrieben. Aus dem Satz von Kleene folgt, dass L regulär ist.

Präsenzaufgabe 4

Zeigen Sie mithilfe der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, dass folgende Sprachen nicht regulär sind.

1. $A = \{w \in \{\text{🎄}, \text{⛄}\}^* \mid |w|_{\text{🎄}} = |w|_{\text{⛄}}\}$
2. $B = \left\{w \in \{\text{🎄}, \text{⛄}, \text{🍪}\}^* \,\middle|\, |w|_{\text{🎄}} = |w|_{\text{⛄}} = |w|_{\text{🍪}}\right\}$
3. $C = \left\{\text{🎄}^k \text{⛄}^\ell \text{🍪}^m \,\middle|\, k = 0 \vee \ell = m\right\}$

Verwenden Sie insbesondere weder das Pumping-Lemma noch den Satz von Myhill-Nerode. Sie dürfen jedoch verwenden, dass $L = \{\text{🎄}^n \text{⛄}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Lösung

1. Angenommen, A ist regulär. Dann ist auch
$$L = A \cap L(\text{🎄}^* \text{⛄}^*) = \{\text{🎄}^n \text{⛄}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
regulär. Widerspruch!

2. Angenommen, B ist regulär. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \{\text{🎄}, \text{⛄}, \text{🍪}\}^* \to \{\text{🎄}, \text{⛄}\}^*$, der durch $\varphi(\text{🎄}) = \text{🎄}$, $\varphi(\text{⛄}) = \text{⛄}$ und $\varphi(\text{🍪}) = \varepsilon$ definiert ist. Da die Klasse der regulären Sprachen unter Homomorphismen abgeschlossen ist, ist auch
$$\varphi(B) = \{w \in \{\text{🎄}, \text{⛄}\}^* \mid |w|_{\text{🎄}} = |w|_{\text{⛄}}\} = A$$
regulär. Widerspruch!

3. Angenommen, C ist regulär. Dann ist auch
$$L = C \cap L(\text{🎄}\text{🎄}^* \text{⛄}^* \text{🍪}^*) = \{\text{🎄}^m \text{⛄}^n \text{🍪}^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m \geq 1\}$$
regulär. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \{\text{🎄}, \text{⛄}, \text{🍪}\}^* \to \{\text{🎄}, \text{⛄}\}^*$, der durch $\varphi(\text{🎄}) = \varepsilon$, $\varphi(\text{⛄}) = \text{🎄}$ und $\varphi(\text{🍪}) = \text{⛄}$ definiert ist. Da die Klasse der regulären Sprachen unter Homomorphismen abgeschlossen ist, ist auch
$$\varphi(L) = \{\text{🎄}^n \text{⛄}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
regulär. Widerspruch!

   Bemerkung: Die Sprache C erfüllt die Eigenschaft des Pumping-Lemmas, obwohl sie nicht regulär ist. Sie gehört also zu den nichtregulären Sprachen, deren Nichtregularität nicht mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden können.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \circ)$ bildet mit
$$x \circ y := 2x + 2y + xy + 2$$
ein kommutatives Monoid, aber keine Gruppe.

Knobelaufgabe 2

Aus Präsenzaufgabe 2 wissen wir, dass das syntaktische Monoid für die Sprache

$$L = \{🎄^m ⛄^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{🎄, ⛄\}$ weder eine Gruppe noch kommutativ ist. Geben Sie jeweils eine Sprache L mit den geforderten Eigenschaften an.

1. $\mathrm{Synt}(L)$ ist kommutativ, aber keine Gruppe.
2. $\mathrm{Synt}(L)$ ist eine nicht kommutative Gruppe.
3. $\mathrm{Synt}(L)$ ist eine kommutative Gruppe.

Knobelaufgabe 3

Welche der folgenden Sprachen sind für jedes Alphabet Σ und jede reguläre Sprache L über Σ regulär?

1. $A = \{ww \mid w \in L\}$
2. $B = \{w \mid ww \in L\}$

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Knobelaufgabe 4

Seien $\Sigma = \{🎄, ⛄\}$ und $\varphi \colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $\varphi(w) = 🎄^{|w|_{🎄}} ⛄^{|w|_{⛄}}$ die Funktion aus Vorbereitungsaufgabe 3. Zeigen Sie oder widerlegen Sie: Für jede reguläre Sprache L über Σ ist $\varphi^{-1}(L)$ regulär.