Universität Stuttgart

Lösungsblatt 12

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Seien Σ und Γ zwei Alphabete, $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus, A eine Sprache über Σ und B eine Sprache über Γ. Aus Aufgabe 4 von Blatt 3 und Aufgabe 4 von Blatt 5 kennen wir folgende Abschlusseigenschaften:

$$A \text{ regulär} \implies \varphi(A) \text{ regulär} \qquad \text{und} \qquad B \text{ regulär} \implies \varphi^{-1}(B) \text{ regulär}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrungen:

1. $\varphi(A)$ regulär $\implies A$ regulär
2. $\varphi^{-1}(B)$ regulär $\implies B$ regulär

Lösung

Beide Aussagen sind falsch. Für die Gegenbeispiele betrachten wir die Alphabete $\Sigma = \Gamma = \{a\}$, den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$, der durch $\varphi(a) = \varepsilon$ definiert ist, und die Sprachen $A = B = \{a^p \mid p \text{ prim}\}$.

1. $\varphi(A) = \{\varepsilon\}$ ist regulär, aber A bekanntlich nicht.
2. $\varphi^{-1}(B) = \emptyset$ ist regulär, aber B bekanntlich nicht.

Bemerkung: Für eine Funktion $f\colon X \to Y$ und Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gelten im Allgemeinen nur die Inklusionen

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \qquad \text{und} \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

Für die Umkehrungen gilt

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A \text{ für alle } A \subseteq X \iff f \text{ injektiv}$$

und

$$B \subseteq f(f^{-1}(B)) \text{ für alle } B \subseteq Y \iff f \text{ surjektiv}.$$

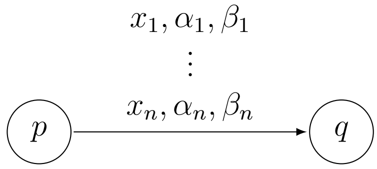
Für die Gegenbeispiele musste deshalb ein Homomorphismus genommen werden, der weder injektiv noch surjektiv ist.

Vorbereitungsaufgabe 2

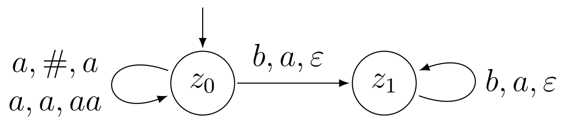
Sei $M = (\{0,1\}, \{a,b,c\}, \{\#\}, \delta, 0, \#)$ ein PDA mit

$$\begin{aligned}
&\delta(0,\varepsilon,\#) = \{(1,\#)\} && \delta(1,\varepsilon,\#) = \emptyset \\
&\delta(0,a,\#) = \{(0,\#)\} && \delta(1,a,\#) = \{(1,\#)\} \\
&\delta(0,b,\#) = \{(0,\varepsilon)\} && \delta(1,b,\#) = \{(1,\#)\} \\
&\delta(0,c,\#) = \emptyset && \delta(1,c,\#) = \{(0,\#\#),(1,\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

1. Stellen Sie M grafisch dar. Verwenden Sie die übliche grafische Darstellung von Automaten mit Übergängen der Form



für $(q, \beta_1) \in \delta(p, x_1, \alpha_1), \ldots, (q, \beta_n) \in \delta(p, x_n, \alpha_n)$. Beispielsweise kann der PDA für die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ aus Vorlesungsfolie 30.4 wie folgt dargestellt werden:



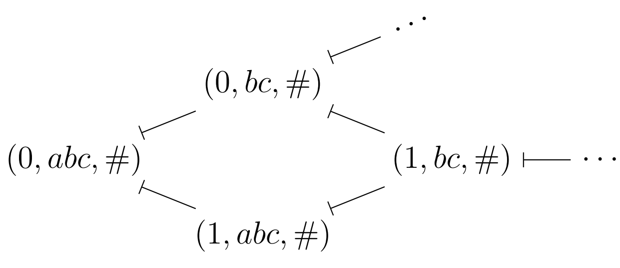
Hinweis: Für das Format der Kantenbeschriftungen gibt es keinen Standard in der Literatur. Es variiert von Autor zu Autor. Statt x_i, α_i, β_i sind beispielsweise

$$x_i\,(\alpha_i \to \beta_i) \qquad x_i, \alpha_i/\beta_i \qquad (x_i, \alpha_i) \to \beta_i$$

ebenfalls gängige und bei uns zulässige Schreibweisen. Man beachte, dass die Reihenfolge der drei Komponenten bei allen vier Formaten dieselbe ist.

2. Der *Konfigurationsgraph* eines PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ auf einem Wort $w \in \Sigma^*$ ist der Graph der Einschränkung der Konfigurationsübergangsrelation $\vdash$ auf der Menge $\{C \mid (s, w, \#) \vdash^* C\}$ aller von der Startkonfiguration $(s, w, \#)$ erreichbaren Konfigurationen.

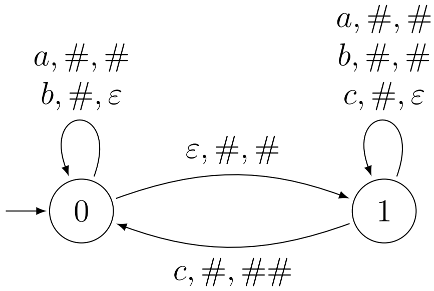
   Geben Sie den Konfigurationsgraphen von M auf $w = abc$ grafisch an. Vervollständigen Sie hierzu das folgende Bild:



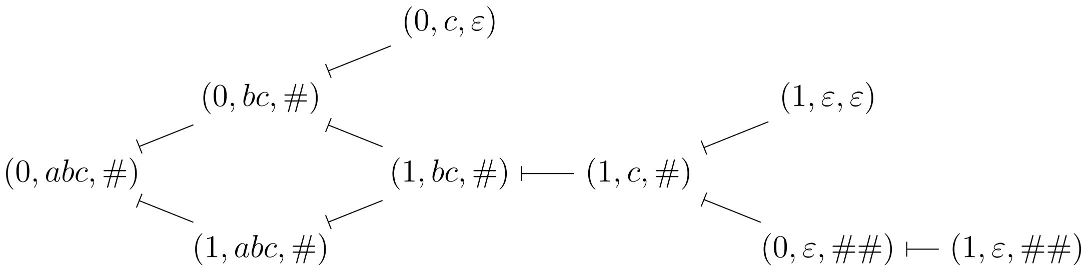
3. Gilt $w \in N(M)$?

Lösung

1. M:



2. Folgende 9 Konfigurationen sind erreichbar:



3. Wegen $(0, w, \#) \vdash^* (1, \varepsilon, \varepsilon)$ gilt $w \in N(M)$.

Präsenzaufgaben

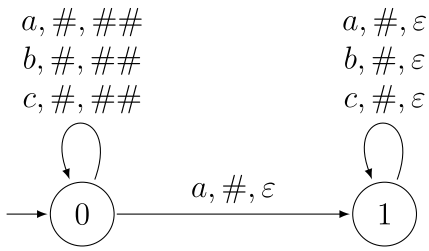
Präsenzaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet.

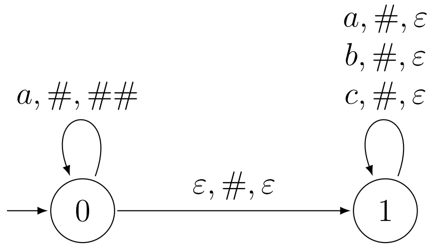
1. Geben Sie grafisch einen PDA M_1 mit $N(M_1) = \{uav \mid u, v \in \Sigma^* \wedge |u| = |v|\}$
2. Geben Sie grafisch einen PDA M_2 mit $N(M_2) = \left\{a^{|w|}w \;\middle|\; w \in \Sigma^*\right\}$
3. Überprüfen Sie, dass $aabc$ von M_2 akzeptiert wird, aber nicht von M_1.

Lösung

1.



2.

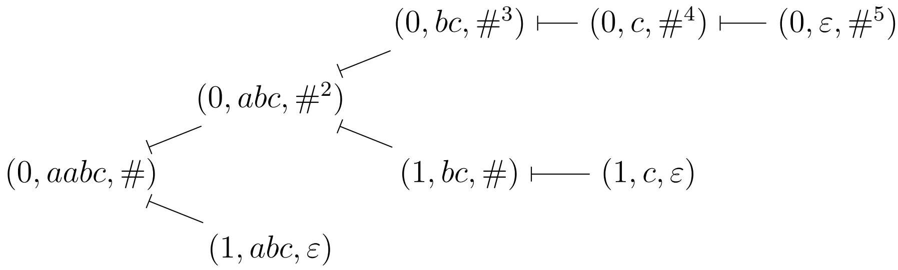


3. M_2: Wegen

$$(0, aabc, \#) \vdash (0, abc, \#^2) \vdash (0, bc, \#^3) \vdash (1, bc, \#^2) \vdash (1, c, \#) \vdash (1, \varepsilon, \varepsilon)$$

gilt $(0, aabc, \#) \vdash^* (1, \varepsilon, \varepsilon)$ und somit $aabc \in N(M_2)$.

M_1: Der Konfigurationsgraph von M_1 auf $aabc$ sieht wie folgt aus:



Da weder $(0, \varepsilon, \varepsilon)$ noch $(1, \varepsilon, \varepsilon)$ von $(0, aabc, \#)$ erreichbar sind, gilt $aabc \notin N(M_1)$.

Hinweis: Da der Kellerinhalt ebenfalls ein Wort (über dem Kelleralphabet) ist, gelten für ihn die üblichen Operationen und abkürzende Schreibweisen wie für Wörter, z. B. $\#^n = \underbrace{\# \ldots \#}_{n \text{ mal}}$.

Präsenzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und $L = \{a^k b^\ell c^m \mid k + \ell = m\}$ eine Sprache über Σ.

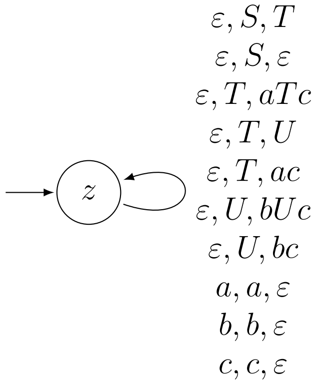
1. Geben Sie eine Typ-2-Grammatik G mit $L(G) = L$ an. Ihre Grammatik darf höchstens 7 Produktionsregeln besitzen und soll die ε-Sonderregel einhalten.
2. Geben Sie den PDA M mit $N(M) = L(G)$ aus Vorlesungsfolie 31.2 grafisch an.

Lösung

1. $G = (\{S, T, U\}, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to T \mid \varepsilon \\ T &\to aTc \mid U \mid ac \\ U &\to bUc \mid bc. \end{aligned}$$

2. $M = (\{z\}, \{a, b, c\}, \{S, T, U, a, b, c\}, \delta, z, S)$ mit folgender Übergangsfunktion:



Bemerkung: Man vergleiche die Ableitung des Wortes $w = aabccc$ in G mit der Konfigurationsfolge von M auf w:

- In G:
$$S \Rightarrow_G T \Rightarrow_G aTc \Rightarrow_G aaTcc \Rightarrow_G aaUcc \Rightarrow_G aabccc.$$

- In M:
$$\begin{aligned}(z, aabccc, S) &\vdash (z, aabccc, T) \vdash (z, aabccc, aTc) \vdash (z, abccc, Tc)\\ &\vdash (z, abccc, aTcc) \vdash (z, bccc, Tcc) \vdash (z, bccc, Ucc)\\ &\vdash (z, bccc, bccc) \vdash (z, ccc, ccc) \vdash (z, cc, cc) \vdash (z, c, c) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

An welchen Konfigurationsübergängen wurde eine Produktion der Grammatik angewendet? Welche?

Präsenzaufgabe 3

Ein *PDA mit Endzuständen* M ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$, sodass $F \subseteq Q$ gilt und $M' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ ein PDA ist. Die von M akzeptierte Sprache ist

$$N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists f \in F, X \in \Gamma^* \colon (s, w, \#) \vdash^* (f, \varepsilon, X)\},$$

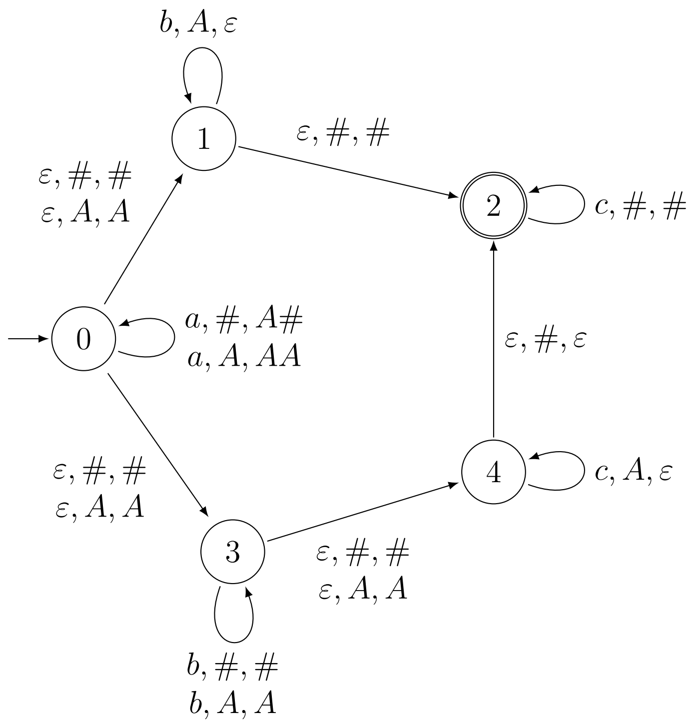
wobei $\vdash$ die Konfigurationsübergangsrelation von M' ist.

1. Geben Sie einen PDA mit Endzuständen M für die Sprache
$$L = \left\{a^k b^\ell c^m \,\middle|\, k \in \{\ell, m\}\right\}$$
an. Wie üblich können Endzustände grafisch durch Doppelkreise dargestellt werden.

2. Aus der Vorlesung wissen wir, dass PDAs und PDAs mit Endzuständen genau dieselben Sprachen akzeptieren.
   (a) Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$ ein PDA mit Endzuständen. Geben Sie einen zu M äquivalenten PDA M' an.
   (b) Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ ein PDA. Geben Sie einen zu M äquivalenten PDA mit Endzuständen M' an.

Lösung

1. PDA mit Endzuständen M:



2. (a) $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', s', \#')$ mit

   - $Q' = Q \cup \{s', f\}$ für beliebige $s', f \notin Q$ mit $s' \neq f$,
   - $\Gamma' = \Gamma \cup \{\#'\}$ für ein $\#' \notin \Gamma$ und
   - $\delta' \colon Q' \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma' \to \mathcal{P}_e(Q' \times \Gamma'^*)$ mit

$$\delta'(q,x,X) = \begin{cases} \{(s, \#\#')\}, & \text{falls } (q,x,X) = (s', \varepsilon, \#') \\ \{(f,\varepsilon)\} \cup \delta(q,x,X), & \text{falls } (q,x,X) \in F \times \{\varepsilon\} \times \Gamma \\ \{(f,\varepsilon)\}, & \text{falls } (q,x,X) \in \{f\} \times \{\varepsilon\} \times \Gamma' \\ & \text{oder } (q,x,X) \in F \times \{\varepsilon\} \times \{\#'\} \\ \delta(q,x,X) & \text{falls } (q,x,X) \in Q \times \Sigma \times \Gamma \\ & \text{oder } (q,x,X) \in (Q \setminus F) \times \{\varepsilon\} \times \Gamma \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (b) $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', s', \#', F)$ mit

   - $Q' = Q \cup \{s', f\}$ für beliebige $s', f \notin Q$ mit $s' \neq f$,
   - $\Gamma' = \Gamma \cup \{\#'\}$ für ein $\#' \notin \Gamma$,
   - $F = \{f\}$ und

- $\delta' \colon Q' \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma' \to \mathcal{P}_e(Q' \times \Gamma'^*)$ mit

$$\delta'(q,x,X) = \begin{cases} \{(s, \#\#')\}, & \text{falls } (q,x,X) = (s', \varepsilon, \#') \\ \{(f, \#')\}, & \text{falls } (q,x,X) \in Q \times \{\varepsilon\} \times \{\#'\} \\ \delta(q,x,X) & \text{falls } (q,x,X) \in Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Zeigen Sie die Korrektheit der beiden Konstruktionen aus Präsenzaufgabe 3, Teil 2.

Knobelaufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Geben Sie eine grobe Beweisskizze für jede Ihrer Antworten an.

Hinweis: Zwei PDAs heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Sprache akzeptieren.

1. Für jeden PDA, der nicht das leere Wort akzeptiert, gibt es einen äquivalenten PDA ohne ε-Übergänge.
2. Für jeden PDA gibt es einen äquivalenten PDA mit nur zwei Kellersymbolen.
3. Für jeden PDA gibt es einen äquivalenten PDA, für den ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass dieser nie mehr als k Symbole auf dem Keller hat.