Lösungsblatt 13

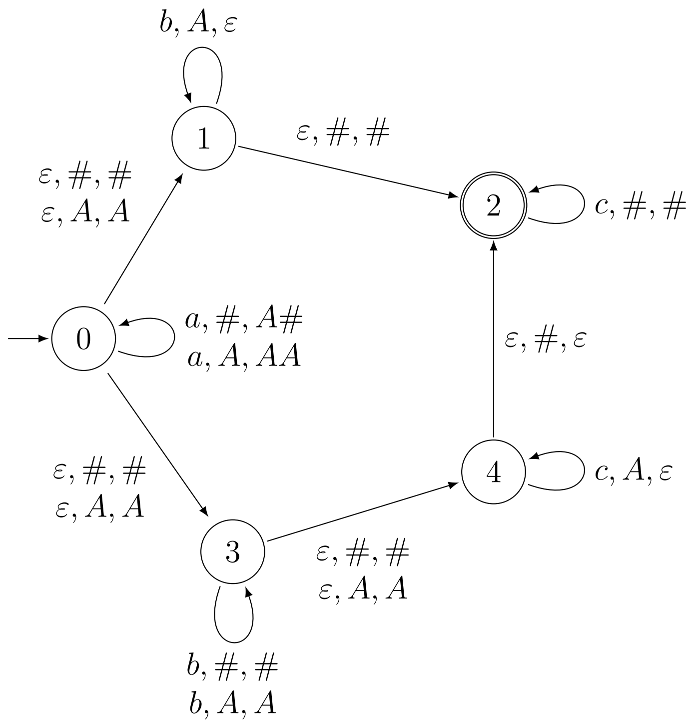
Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Ein PDA mit Endzuständen $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$ heißt *deterministischer PDA* (kurz *DPDA*), wenn für alle $q \in Q$, alle $x \in \Sigma$ und alle $X \in \Gamma$ gilt:

$$|\delta(q, x, X)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| \leq 1.$$

Ist der folgende PDA mit Endzuständen M aus Ergänzungsblatt 12 deterministisch?



Lösung

M ist kein DPDA wegen

$$|\delta(0, a, \#)| + |\delta(0, \varepsilon, \#)| = 1 + 2 = 3 \not\leq 1.$$

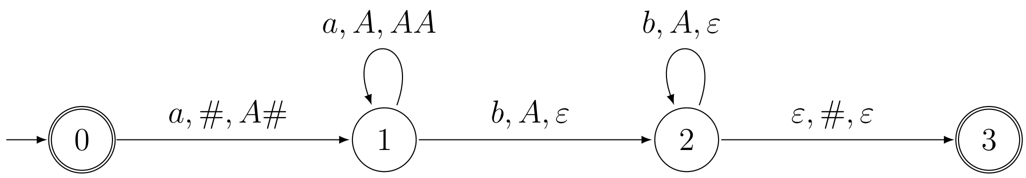
Alternative Begründungen sind:

- $|\delta(0, a, A)| + |\delta(0, \varepsilon, A)| = 1 + 2 = 3 \not\leq 1$
- $|\delta(3, b, \#)| + |\delta(3, \varepsilon, \#)| = 1 + 1 = 2 \not\leq 1$
- $|\delta(3, b, A)| + |\delta(3, \varepsilon, A)| = 1 + 1 = 2 \not\leq 1$

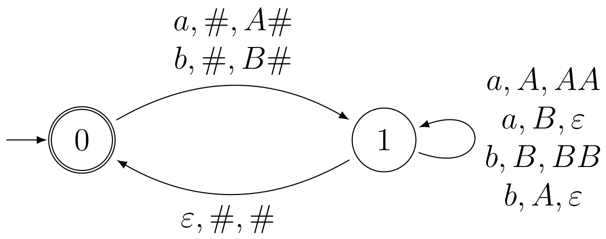
Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jeden der folgenden DPDAs M seine akzeptierte Sprache $N(M)$ an.

1. $M = (\{0, 1, 2, 3\}, \Sigma, \{\#, A\}, \delta, 0, \#, \{0, 3\})$ mit δ wie folgt:



2. $M = (\{0, 1\}, \Sigma, \{\#, A, B\}, \delta, 0, \#, \{0\})$ mit δ wie folgt:



Lösung

1. $N(M) = \left\{a^k b^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$
2. $N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

Vorbereitungsaufgabe 3

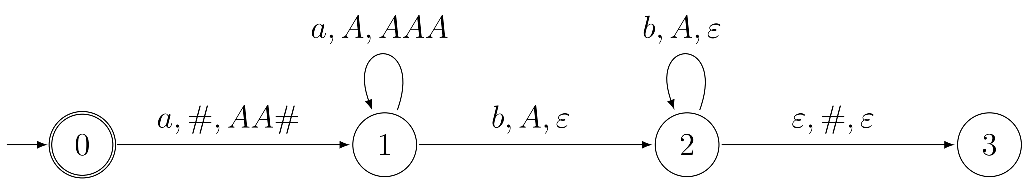
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ einen DPDA M an.

1. $L = \left\{a^k b^{2k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a < |w|_b\}$

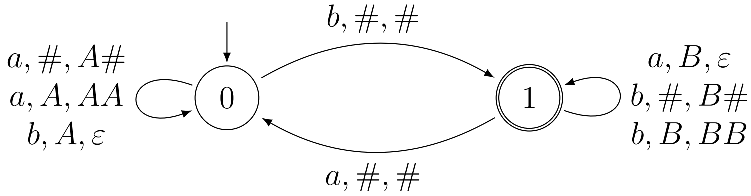
Lösung

Die Lösungen sind nicht eindeutig. Elegantere Lösungen mit weniger Zuständen oder Kellersymbolen sind immer herzlich willkommen!

1. $M = (\{0, 1, 2\}, \Sigma, \{\#, A\}, \delta, 0, \#, \{0\})$ mit δ wie folgt:



2. $M = (\{0, 1\}, \Sigma, \{\#, A, B\}, \delta, 0, \#, \{1\})$ mit δ wie folgt:



Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

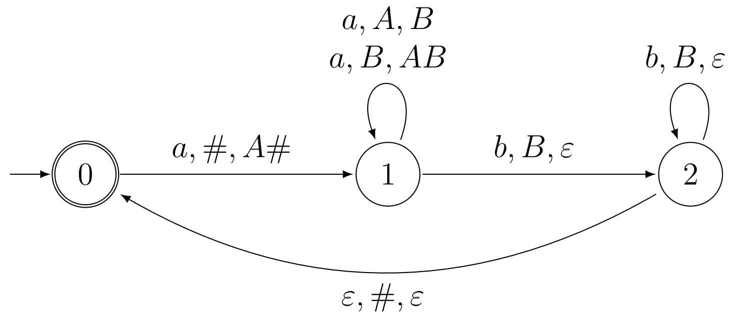
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über Σ einen DPDA M mit möglichst wenigen Zuständen und Kellersymbolen an.

1. $L = \left\{ a^{2k} b^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$
2. $L = \left\{ a^k b^\ell \,\middle|\, 2k < \ell \right\}$

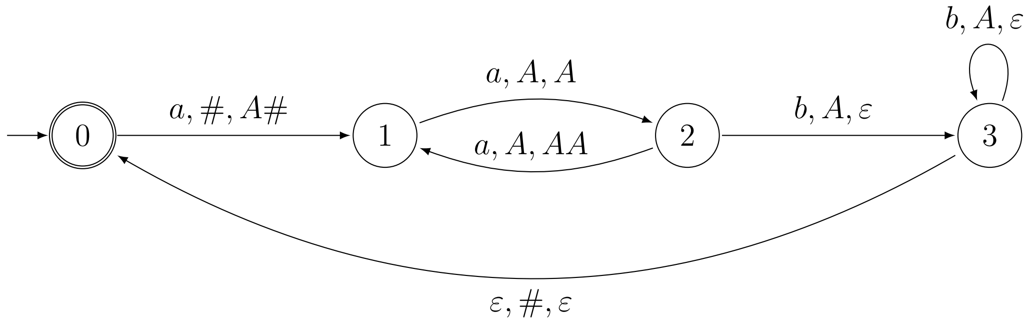
Lösung

Die Lösungen sind nicht eindeutig. Für die erste Teilaufgabe geben wir sogar ~~drei~~ vier verschiedene Ansätze an. Elegante Lösungen, die eine vergleichbare Anzahl an Zuständen und Kellersymbolen besitzen und andere Strategien verfolgen sind immer herzlich willkommen![*]

1. $M = (\{0, 1, 2\}, \Sigma, \{\#, A, B\}, \delta, 0, \#, \{0\})$ mit δ wie folgt:

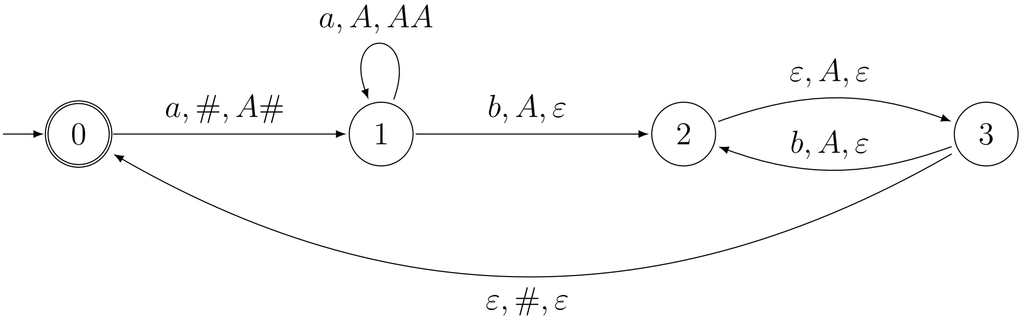


$M = (\{0, 1, 2, 3\}, \Sigma, \{\#, A\}, \delta, 0, \#, \{0\})$ mit δ wie folgt:

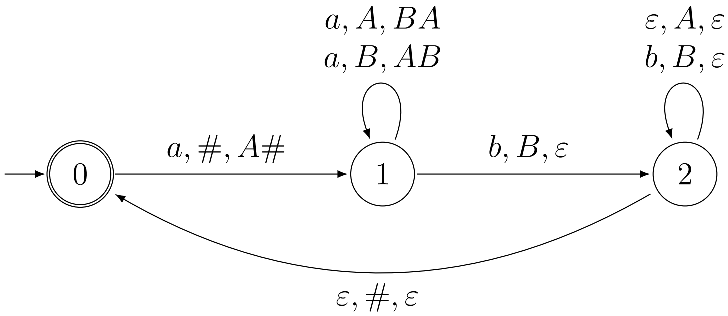


[*] Danke Jana für den 4. DPDA!

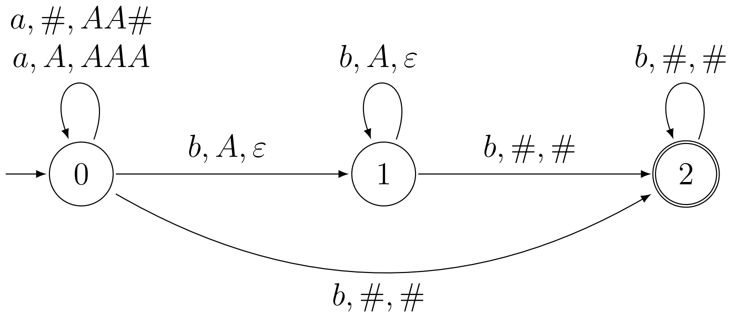
$M = (\{0, 1, 2, 3\}, \Sigma, \{\#, A\}, \delta, 0, \#, \{0\})$ mit δ wie folgt:



$M = (\{0, 1, 2\}, \Sigma, \{\#, A, B\}, \delta, 0, \#, \{0\})$ mit δ wie folgt:



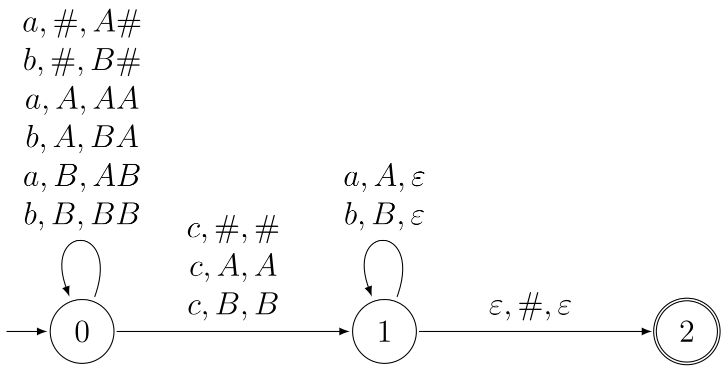
2. $M = (\{0, 1, 2\}, \Sigma, \{\#, A\}, \delta, 0, \#, \{0\})$ mit δ wie folgt:



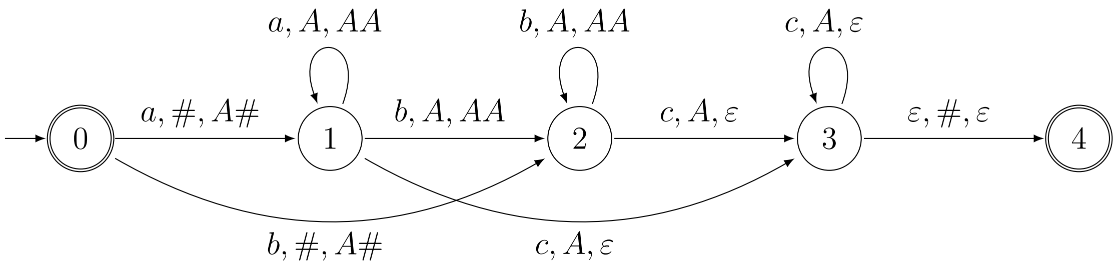
Präsenzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jeden der folgenden DPDAs M seine akzeptierte Sprache $N(M)$ an.

1. $M = (\{0, 1, 2\}, \Sigma, \{\#, A, B\}, \delta, 0, \#, \{2\})$ mit δ wie folgt:



2. $M = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \Sigma, \{\#, A, B\}, \delta, 0, \#, \{2\})$ mit δ wie folgt:



Lösung

1. $N(M) = \left\{ wcw^R \,\middle|\, w \in \{a, b\}^* \right\}$
2. $N(M) = \left\{ a^k b^\ell c^m \,\middle|\, k + \ell = m \right\}$

Präsenzaufgabe 3

Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet, L die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a < \min\{|w|_b, |w|_c\}\}$$

über Σ und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ das Komplement von L.

1. Zeigen Sie, dass L nicht kontextfrei ist.
2. Geben Sie einen PDA M für $\overline{L}$ an.
3. Gibt es auch einen DPDA für $\overline{L}$?

Lösung

1. Wir verwenden das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

   Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $z = a^n b^{n+1} c^{n+1}$. Dann gilt $z \in L$ und $|z| = 3n + 2 \geq n$. Seien nun $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

   <u>Fall 1</u>: $|vx|_a \geq 1$. Wegen $|vwx| \leq n$ ist $|vx|_c = 0$. Für $i = 2$ folgt:

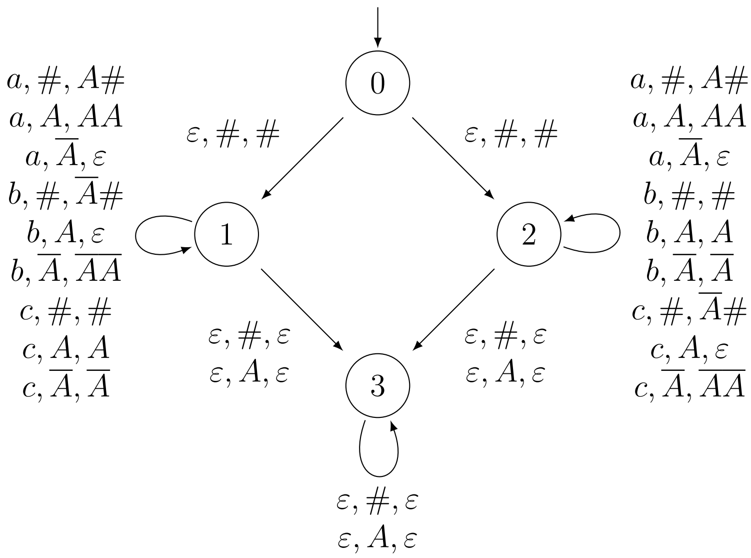
   $$|uv^i wx^i y|_a \geq n + 1 = |uv^i wx^i y|_c.$$

Fall 2: $|vx|_a = 0$. Wegen $|vx| \geq 1$ ist $|vx|_b \geq 1$ oder $|vx|_c \geq 1$. Für $i = 0$ folgt:

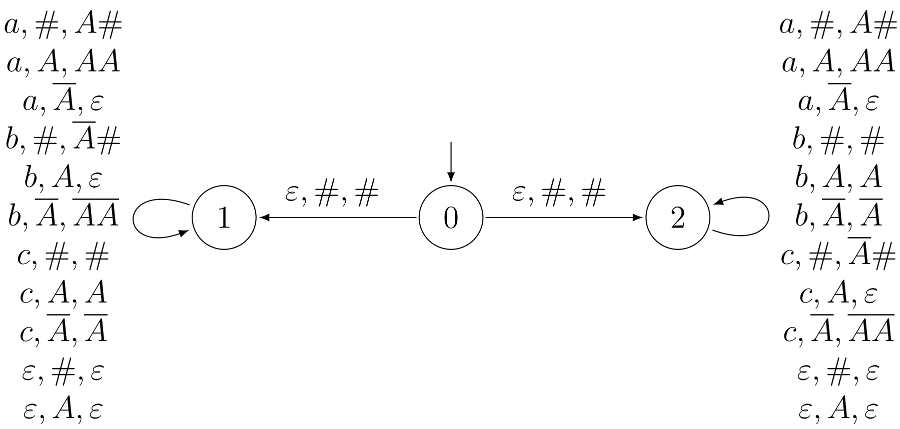
$$|uv^iwx^iy|_a = n \geq \min\{|uv^iwx^iy|_b, |uv^iwx^iy|_c\}.$$

In beiden Fällen existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $uv^iwx^iy \notin L$.

2. $M = (\{0, 1, 2, 3\}, \Sigma, \{\#, A, \overline{A}\}, \delta, 0, \#)$ mit δ wie folgt:



Eine Alternative mit nur drei Zuständen ist $M = (\{0, 1, 2\}, \Sigma, \{\#, A, \overline{A}\}, \delta, 0, \#)$ mit δ wie folgt:



3. Nein. Wäre $\overline{L}$ deterministisch kontextfrei, dann müsste auch $\overline{\overline{L}} = L$ deterministisch kontextfrei sein. Aus Teil 1 wissen wir aber, dass L nicht kontextfrei und deshalb auch nicht deterministisch kontextfrei ist.

Präsenzaufgabe 4

Ziel dieser Aufgabe ist es, die intuitive Arbeitsweise von Turingmaschinen zu verstehen, bevor diese in der Vorlesung formal eingeführt werden.

Entwerfen Sie auf

`http://morphett.info/turing`

eine Turingmaschine, die die Buchstaben innerhalb eines Eingabewortes aus $\{a, b\}^*$ so sortiert, dass kein b vor einem a vorkommt. Vor dem Halten soll die Turingmaschine den Leseschreibkopf auf das linkeste beschriebene Feld positionieren.

Lösung

Eine Turingmaschine ist, sowie DFAs, NFAs, PDAs und DPDAs, ein mathematisches Modell einer Rechenmaschine. Intuitiv besteht eine Turingmaschine aus einer endlichen Menge von Zuständen, einem Band mit unendlich vielen sequentiell angeordneten Feldern und einem Leseschreibkopf, der sich über die Felder bewegen und, in Abhängigkeit von dem aktuellen Zustand, den Feldinhalt (ein Zeichen) und den aktuellen Zustand verändern kann.

Das Verhalten einer Turingmaschine wird von einer Funktion δ beschrieben. Diese bekommt den aktuellen Zustand q und den Inhalt x des Feldes, auf dem sich der Leseschreibkopf befindet, und gibt ein Tripel $\delta(q, x) = (q', x', m)$ zurück, wobei q' der neue Zustand ist, x' das Zeichen womit das x überschrieben wird und $m \in \{L, R, N\}$ die Bewegung von dem Leseschreibkopf nach der Operation:

L: ein Feld nach links

R: ein Feld nach rechts

N: keine Bewegung

Eine Turingmaschine beginnt im Startzustand mit dem Leseschreibkopf auf dem ersten Zeichen des Eingabewortes. Die restlichen Felder (links und rechts von der Eingabe) sind leer. Die Berechnung einer Turingmaschine endet sobald diese einen Endzustand erreicht hat.

Eine mögliche Lösungsstrategie verwendet folgende 6 Zustände:

0: Startzustand. Der Leseschreibkopf befindet sich auf dem ersten Zeichen des Wortes. Suche nach rechts das erste b, ersetze es durch ein a und gehe in den Zustand 1 über. Falls kein b gefunden wird, gehe in den Zustand 4 über.

1: Es wurde ein b durch ein a ersetzt. Suche nach rechts das erste a, ersetze es durch ein b und gehe in den Zustand 2 über. Falls kein a gefunden wird, gehe in den Zustand 3 über.

2: Das linkeste b wurde mit dem ersten a rechts davon vertauscht. Bewege den Leseschreibkopf zum Anfang des Wortes und gehe erneut in den Zustand 0 über.

3: Es wurde ein b durch ein a ersetzt, aber es gibt kein a rechts davon, was durch ein b ersetzt werden kann. Suche nach links das erste a, ersetze es durch ein b und gehe in den Zustand 4 über.

4: Die Zeichen sind korrekt sortiert. Bringe den Leseschreibkopf an den Anfang des Wortes.

5: Endzustand. Beende die Berechnung.

Als Tabelle:

alter Zustand	altes Zeichen	neuer Zustand	neues Zeichen	Kopf-bewegung
0	a	0	a	R
0	b	1	a	R
0	$\square$	4	$\square$	L
1	b	1	b	R
1	a	2	b	L
1	$\square$	3	$\square$	L
2	b	2	b	L
2	a	0	a	R
3	b	3	b	L
3	a	4	b	L
4	a	4	a	L
4	b	4	b	L
4	$\square$	5	$\square$	R

Eine Simulation dieser Lösungsstrategie kann unter folgendem Link gefunden werden:

`http://morphett.info/turing/?ab5180c798d5c9e481bece368e75c0e4`.

Man beachte, dass die Spalten der Tabelle dort anders angeordnet sind.

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Aus Knobelaufgabe 2 von Ergänzungsblatt 12 wissen wir, dass es für jeden PDA, der nicht das leere Wort akzeptiert, einen äquivalenten PDA ohne ε-Übergänge gibt. Dies ist bei DPDAs nicht der Fall.

Geben Sie eine deterministische kontextfreie Sprache L an und zeigen Sie, dass sie von keinem DPDA ohne ε-Übergänge akzeptiert wird.