Lösungsblatt 15

Zu den Modulprüfungen vom Wintersemester 2017 und vom Sommersemester 2018 werden Lösungen zur Verfügung gestellt (siehe Präsenzaufgaben 8 und 9). Dies wird bei den Modulprüfungen vom Wintersemester 2018 und vom Sommersemester 2019 jedoch nicht der Fall sein. Grund hierfür sind institutsinternen Regelungen, die ich respektiere und die einen (für mich auch nachvollziehbaren) didaktischen Zweck erfüllen.

Wer gewissenhaft gelernt hat, sollte in der Regel in der Lage sein, die Korrektheit der eigenen Lösungen zu erkennen. Wer jeoch bei schwierigeren Aufgaben nach längerem Überlegen auf keinen Lösungsansatz kommt oder sich über die Korrektheit der eigenen Lösung nicht sicher ist, kann sehr gerne jederzeit zu mir ins Büro (1.112) kommen.

Viel Erfolg für die Prüfungen, schöne und erholsame Ferien und viel Spaß im weiteren Verlauf des Studiums!

Vorbereitungsaufgaben

Keine Vorbereitungsaufgaben.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Welche Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ wird von $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit

$$P = \{S \to aTTb, T \to bSa \mid \varepsilon\}$$

erzeugt? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Lösung

Wir vermuten, dass

$$L = \left\{(ab)^{2m+1} \,\middle|\, m \geq 0\right\}$$

gilt und zeigen, analog zu den Präsenzaufgaben 1 und 2 von Ergänzungsblatt 4, beide Inklusionen der Mengengleichung $L(G) = L$ getrennt voneinander.

<u>Beweis der Inklusion $L(G) \subseteq L$</u>

Wir zeigen für alle $n \geq 1$ und alle $w \in \Sigma^*$ die Implikationen

$$S \Rightarrow^n w \implies \exists m \geq 0\colon w = (ab)^{2m+1} \tag{1}$$
$$T \Rightarrow^n w \implies \exists \ell \geq 0\colon w = (ba)^{2\ell} \tag{2}$$

mit starker Induktion nach n.

Induktionsanfang

Zu zeigen sind für jedes $w \in \Sigma^*$ die Implikationen (1) und (2) für $n = 0$. Sei hierfür $w \in \Sigma^*$ beliebig.

(1) Da die Prämisse $S \Rightarrow w$ falsch ist, ist die Implikation trivialerweise erfüllt.

(2) Angenommen, es gilt $T \Rightarrow w$. Dann folgt $w = \varepsilon$, also $w = (ba)^{2\ell}$ für $\ell = 0$.

Induktionsschritt

Sei $n \geq 1$ beliebig. Angenommen, für jedes $w \in \Sigma^*$ gilt (IV):

$$S \Rightarrow^{\leq n} w \implies \exists m \geq 0\colon w = (ab)^{2m+1} \tag{3}$$
$$T \Rightarrow^{\leq n} w \implies \exists \ell \geq 0\colon w = (ba)^{2\ell}. \tag{4}$$

Zu zeigen ist für jedes $w \in \Sigma^*$:

$$S \Rightarrow^{n+1} w \implies \exists m \geq 0\colon w = (ab)^{2m+1} \tag{5}$$
$$T \Rightarrow^{n+1} w \implies \exists \ell \geq 0\colon w = (ba)^{2\ell}. \tag{6}$$

Sei hierfür $w \in \Sigma^*$ beliebig.

(7) Angenommen, es gilt $S \Rightarrow^{n+1} w$. Da $S \Rightarrow aTTb$ der einzige mögliche erste Schritt bei der Ableitung von w ist, gibt es Wörter $w', w'' \in \Sigma^*$ mit $T \Rightarrow^{\leq n} w'$, $T \Rightarrow^{\leq n} w''$ und $w = aw'w''b$. Wegen (6) gibt es Zahlen $\ell', \ell'' \geq 0$ mit $w' = (ba)^{2\ell'}$ und $w'' = (ba)^{2\ell''}$. Für $m = \ell' + \ell''$ gilt $m \geq 0$ und

$$w = a(ba)^{2\ell'}(ba)^{2\ell''}b = (ab)^{2(\ell'+\ell'')+1} = (ab)^{2m+1}.$$

(8) Angenommen, es gilt $T \Rightarrow^{n+1} w$. Da $T \Rightarrow bSa$ der einzige mögliche erste Schritt bei der Ableitung von w ist, gibt es ein Wort $w' \in \Sigma^*$ mit $S \Rightarrow^n w'$ und $w = bw'a$. Wegen (5) gibt es ein $m' \geq 0$ mit $w' = (ab)^{2m'+1}$. Für $\ell = m' + 1$ gilt $\ell \geq 0$ und

$$w = b(ab)^{2m'+1}a = (ba)^{2m'+1}ba = (ba)^{2m'+2} = (ba)^{2(m'+1)} = (ba)^{2\ell}.$$

Beweis der Inklusion $L \subseteq L(G)$

Wir zeigen die Aussage

$$\forall m \geq 0\colon S \Rightarrow^* (ab)^{2m+1}$$

mit vollständiger Induktion nach m.

Induktionsanfang

$S \Rightarrow aTTb \Rightarrow^2 ab = (ab)^{2\cdot 0+1}$.

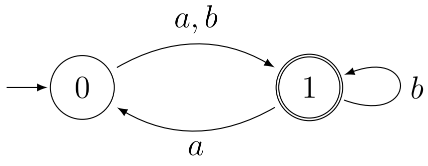
Induktionsschritt

Sei $m \geq 0$ beliebig. Angenommen, es gilt $S \Rightarrow^* (ab)^{2m+1}$ (IV). Dann folgt:

$$S \Rightarrow aTTb \Rightarrow aTb \Rightarrow abSab \overset{\text{IV}}{\Rightarrow^*} ab(ab)^{2m+1}ab = (ab)^{2m+3} = (ab)^{2(m+1)+1}.$$

Präsenzaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und M der folgende DFA über Σ:



Mit L bezeichnen wir die von M akzeptierte Sprache. Wie üblich seien R_L die Myhill-Nerode Relation und $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz bezüglich L.

1. Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung für L an.
2. Geben Sie für jede Klasse in
   (a) Σ^*/R_L
   (b) $\Sigma^*/{\equiv_L}$
   den längen-lexikographisch kleinsten Vertreter an.
3. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $\text{Synt}(L)$ an.
4. Ist $\text{Synt}(L)$ kommutativ?
5. Ist $\text{Synt}(L)$ eine Gruppe?

Lösung

1. L enthält genau die Wörter, die entweder kein b und ungerade viele as oder mindestens ein b und nach dem letzten b gerade viele as enthalten, d. h.:

$$L = \left\{a^{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{wba^{2n} \,\middle|\, w \in \Sigma^* \wedge n \in \mathbb{N}\right\} = \{aa\}^*\{a\} \cup \Sigma^*\{b\}\{aa\}^*.$$

2. (a) ε, a.
   (b) ε, a, b, ba.
3. Für die Verknüpfungstafel schreiben wir der Übersichtlichkeit halber vereinfacht nur w statt $[w]_{\equiv_L}$, d. h. wir rechnen mit Vertretern:

$\cdot$	ε	a	b	ba
ε	ε	a	b	ba
a	a	ε	b	ba
b	b	ba	b	ba
ba	ba	b	b	ba

4. Synt(L) ist nicht kommutativ, da beispielsweise gilt:

$$[a]_{\equiv_L} \cdot [b]_{\equiv_L} = [b]_{\equiv_L} \neq [ba]_{\equiv_L} = [b]_{\equiv_L} \cdot [a]_{\equiv_L}.$$

5. Synt(L) ist keine Gruppe, da weder $[b]_{\equiv_L}$ noch $[ba]_{\equiv_L}$ ein Inverses besitzen.

Präsenzaufgabe 3

Für Alphabete Σ und Γ nennen wir $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ einen *Homomorphismus*, wenn gilt:

$$\forall x, y \in \Sigma^*\colon \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Dann gilt $\varphi(a_1 \dots a_n) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$. Da das leere Produkt als ε definiert ist, entspricht das für $n = 0$ genau der Gleichung $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.

1. Seien Σ und Γ zwei Alphabete und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige reguläre Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$?

   (a) $\varphi(A)$ ist regulär.
   (b) $\varphi^{-1}(B)$ ist regulär.
   (c) $B \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(B))$.
   (d) $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subseteq B$.
   (e) $A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$.
   (f) $\varphi^{-1}(\varphi(A)) \subseteq A$.

2. Für ein $m \geq 1$ sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ ein m-elementiges Alphabet und L die Sprache

   $$L = \left\{ a_1^n a_2^{n^2} a_3^{n^3} \dots a_m^{n^m} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

   über Σ. Zeigen Sie, dass L genau dann regulär ist, wenn $m = 1$ gilt.

3. Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass

   $$L' = \{ucv \mid uv \in L\}$$

   über dem Alphabet $\Sigma' = \{a, b, c\}$ ebenfalls regulär ist.

Lösung

1. (a) Richtig. Wurde in den Übungen bewiesen.

   (b) Richtig. Wurde in den Übungen bewiesen.

   (c) Falsch. Als Gegenbeipsiel kann man eine Menge B wählen, in der ein Element kein Urbild bezüglich φ besitzt. Für $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ ist $\varphi(w) = \varepsilon$ ein Homomorphismus und $B = \{a\}$ regulär, aber es gilt $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = \emptyset$, was keine Obermenge von B ist.

   (d) Richtig. Sei $w \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$ beliebig. Dann existiert ein $x \in \varphi^{-1}(B)$ mit $\varphi(x) = w$. Aus $x \in \varphi^{-1}(B)$ folgt $\varphi(x) \in B$ und somit $w \in B$.

   (e) Richtig. Sei $w \in A$ beliebig. Dann ist $\varphi(w) \in \varphi(A)$ und somit $w \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$.

   (f) Falsch. Als Gegenbeispiel kann man ein Element aus Γ^* mit mehr als einem Urbild nehmen und die Menge A so wählen, dass sie nur einige Urbilder enthält. Für $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ ist $\varphi(w) = \varepsilon$ ein Homomorphismus und $A = \{\varepsilon\}$ regulär, aber es gilt $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \Sigma^*$, was keine Teilmenge von A ist.

   Hinweise:

- Für das Bild $\varphi(A)$ von A unter φ und das Urbild $\varphi^{-1}(B)$ von B unter φ gilt

$$\varphi(A) = \{\varphi(x) \in B \mid x \in A\} \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi^{-1}(B) = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B\}.$$

- Man beachte, dass die Aussagen 4 und 5 für eine beliebige Funktion $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ und für beliebige Mengen $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ gelten. Dass φ ein Homomorphismus ist oder dass A und B regulär sind, wurde in den Beweisen nicht verwendet.

2. Für $m = 1$ ist $\Sigma = \{a_1\}$ und $L = \{a_1^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \Sigma^*$ offensichtlich regulär. Die Gegenrichtung zeigen wir, indem wir per Widerspruch beweisen, dass L für kein $m > 1$ regulär ist. Sei hierfür $m > 1$ beliebig. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to \{a\}^*$, der durch
$$\varphi(a_i) = \begin{cases} a & \text{für } i = 2 \\ \varepsilon & \text{für } i \neq 2 \end{cases}$$
definiert ist. Wäre L regulär, so wäre auch
$$\varphi(L) = \left\{ a^{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
regulär, was bekanntlich nicht stimmt.

3. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma'^* \to \Sigma^*$, der durch $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ und $\varphi(c) = \varepsilon$ definiert ist. Dann gilt:
$$L' = \Sigma^*\{c\}\Sigma^* \cap \varphi^{-1}(L).$$
Da Σ^*, $\{c\}$ und L regulär sind und die Klasse der regulären Sprachen unter Konkatenation, Schnitt und inversen Homomorphismen abgeschlossen ist, ist auch L' regulär.

Präsenzaufgabe 4

Seien Σ ein Alphabet und L eine reguläre Sprache über Σ. Zeigen Sie, dass folgende Sprachen auch regulär sind.

1. $A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in L\colon x \text{ ist Präfix von } y\}$
2. $B = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in L\colon x \text{ ist Präfix von } y\}$

Lösung

1. Es gilt:
$$A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*\colon xv \in L\}.$$

<u>Mittels Automaten</u>

Da L regulär ist, existiert ein DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $T(M) = L$. Definiere den NFA $M' = (Q, \Sigma, \delta, s, F')$ mit
$$F' = \left\{ q \in Q \,\middle|\, \exists v \in \Sigma^*\colon \hat{\delta}(q, v) \in F \right\}.$$

Dann gilt für jedes $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in A &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon xv \in L \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon \hat\delta(s, xv) = \hat\delta(\hat\delta(s,x), v) \in F \\ &\iff \hat\delta(s,x) \in F' \\ &\iff x \in T(M'), \end{aligned}$$

d. h. $T(M') = A$.

<u>Mittels Erkennbarkeit durch Monoide</u>

Da L regulär ist, ist L erkennbar, d. h. es existieren ein endliches Monoid $(M, \circ)$, ein Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to M$ und eine Teilmenge $P \subseteq M$ mit $L = \varphi^{-1}(P)$.

Wähle $P' = \{a \in M \mid \exists v \in \Sigma^*\colon a \circ \varphi(v) \in P\}$. Dann gilt $P' \subseteq M$ und

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon xv \in L = \varphi^{-1}(P) \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon \varphi(xv) = \varphi(x) \circ \varphi(v) \in P \\ &\iff \varphi(x) \in P', \end{aligned}$$

für alle $x \in \Sigma^*$. Daraus folgt $P = \varphi^{-1}(P')$, d. h. P wird auch von M durch φ erkannt. Also ist P erkennbar und somit auch regulär.

<u>Mittels der Myhill-Nerode-Äquivalenz</u>

Da L regulär ist, ist der Index der Myhill-Nerode-Äquivalenz R_L endlich. Wir zeigen, dass R_L eine Verfeinerung von R_A ist, indem wir für alle $x, y \in \Sigma^*$ die Implikation

$$x \; R_L \; y \implies x \; R_A \; y$$

zeigen. Dann ist der Index von R_A höchstens so groß wie der von R_L, insbesondere also endlich, und A somit regulär.

Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \; R_L \; y$. Dann gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} xw \in A &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon xwv \in L \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon ywv \in L \\ &\iff yw \in A. \end{aligned}$$

<u>Mittels syntaktischer Kongruenz</u>

Dieser Ansatz funktioniert ganz analog zu dem davor.

Da L regulär ist, ist der Index der syntaktischen Kongruenz $\equiv_L$ endlich. Wir zeigen, dass $\equiv_L$ eine Verfeinerung von $\equiv_A$ ist, indem wir für alle $x, y \in \Sigma^*$ die Implikation

$$x \equiv_L y \implies x \equiv_A y$$

zeigen. Dann ist der Index von $\equiv_A$ höchstens so groß wie der von $\equiv_L$, insbesondere also endlich, und A somit regulär.

Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \equiv_L y$. Dann gilt für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w_1 x w_2 \in A &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon w_1 x w_2 v \in L \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*\colon w_1 y w_2 v \in L \\ &\iff w_1 y w_2 \in A. \end{aligned}$$

<u>Mittels Abschlusseigenschaften</u>

Betrachte das (O. B. d. A. zu Σ disjunkte) Alphabet $\widehat{\Sigma} = \{\hat{x} \mid x \in \Sigma\}$ und die Homomorphismen $\varphi, \psi\colon (\Sigma \cup \widehat{\Sigma})^* \to \Sigma^*$ mit $\psi(x) = \varphi(x) = \varphi(\hat{x}) = x$ und $\psi(\hat{x}) = \varepsilon$ für alle $x \in \Sigma$.

Dann gilt:

$$A = \psi(\varphi^{-1}(L) \cap \Sigma^* \widehat{\Sigma}^*).$$

Da die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen ist unter Konkatenation, Schnitt, Homomorphismen und inversen Homomorphismen, ist auch A regulär.

2. Es gilt:

$$B = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in L, v \in \Sigma^*\colon y = xv\} = \{xv \in \Sigma^* \mid x \in L \wedge v \in \Sigma^*\} = L \cdot \Sigma^*.$$

Da L und Σ^* regulär sind und die Klasse der regulären Sprachen unter Konkatenation (= Produkt) abgeschlossen sind, ist auch B regulär.

Präsenzaufgabe 5

Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und L folgende Sprache über Σ:

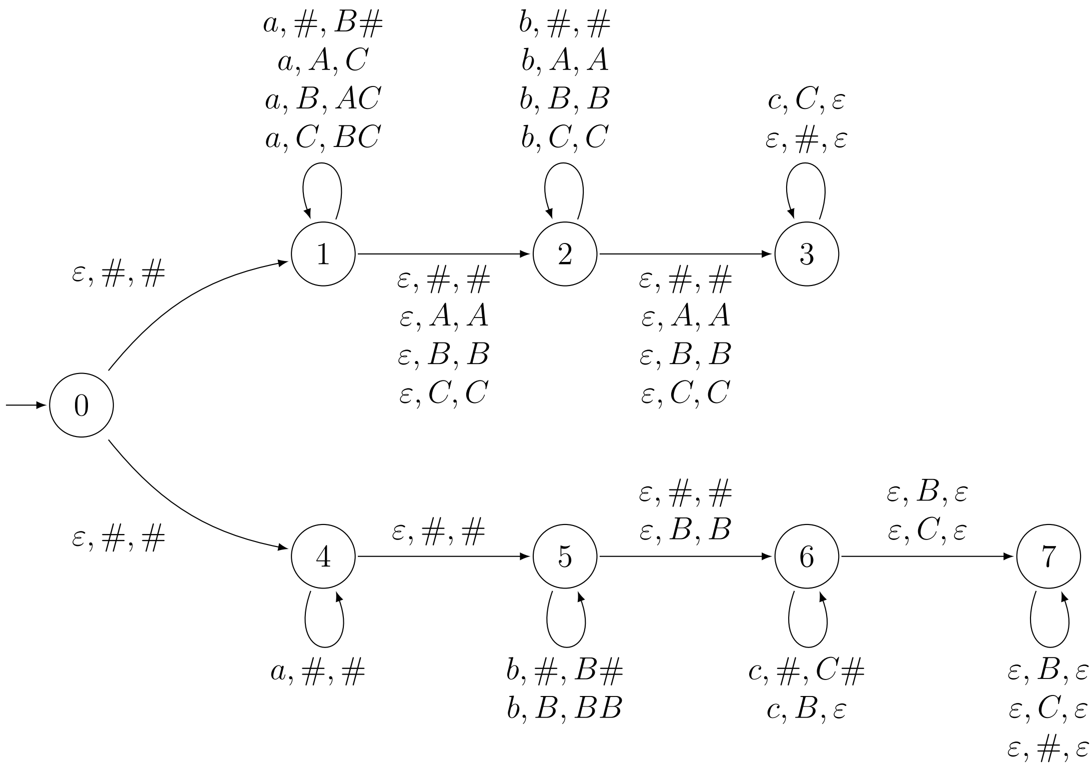
$$L = \left\{ a^k b^\ell c^m \,\middle|\, 2k = 3m \vee \ell \neq m \right\}.$$

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
2. Geben Sie einen PDA M für L an.

Lösung

1. $G = (\{S, T, U, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit folgenden Produktionen in P:

$$\begin{array}{lll} S \to T \mid AU \mid U \mid \varepsilon & U \to bUc \mid B \mid C & B \to bB \mid b \\ T \to aaaTcc \mid aaacc \mid B & A \to aA \mid a & C \to cC \mid c. \end{array}$$



2.

Präsenzaufgabe 6

Sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid ba \\ A &\to BA \mid a \\ B &\to BA \mid b. \end{aligned}$$

Geben Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' in Greibach-Normalform an.

Lösung

Wir gehen vor wie auf den Vorlesungsfolien bzw. bei Vorbereitungsaufgabe 2 auf Ergänzungsblatt 11 beschrieben.

Schritt 1 (erster Algorithmus)

Mit dem ersten Algorithmus werden Regeln der Form $A_i \to A_j\alpha$ mit $i \geq j$ entfernt. Wir wählen die Nummerierung $(A_1, A_2, A_3) = (S, A, B)$, damit die Anzahl solcher Produktionen minimal ist, und erhalten durch Umbenennung die Produktionen

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 \mid ba \\ A_2 &\to A_3A_2 \mid a \\ A_3 &\to A_3A_2 \mid b. \end{aligned}$$

Für $i = 1$ passiert nichts, da keine Regeln der Form $A_1 \to A_1\alpha$ existieren. Für $i = 2$ passiert ebenfalls nichts, da keine Regeln der Formen $A_2 \to A_1\alpha$ oder $A_2 \to A_2\alpha$ existieren.

Für $i = 3$ verändert sich die Regelmenge erst bei der Entfernung der Linksrekursion bzgl. A_3. Durch die Entfernung von $A_3 \to A_3A_2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 \mid ba \\ A_2 &\to A_3A_2 \mid a \\ A_3 &\to b \mid bB \\ B &\to A_2 \mid A_2B. \end{aligned}$$

<u>Schritt 2</u> (zweiter Algorithmus)

Der zweite Algorithmus liefert:

$$\begin{aligned} A_1 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid ba \\ A_2 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \\ A_3 &\to b \mid bB \\ B &\to A_2 \mid A_2B. \end{aligned}$$

<u>Schritt 3</u> (B-Regeln)

Die rechten Seiten der B-Regeln beginnen mit A_2. Durch das Einsetzen von $A_2 \to bA_2 \mid bBA_2 \mid a$ in $B \to A_2 \mid A_2B$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid ba \\ A_2 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \\ A_3 &\to b \mid bB \\ B &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid bA_2B \mid bBA_2B \mid aB. \end{aligned}$$

<u>Schritt 4</u> (Pseudoterminale)

Durch das Einführen von Pseudoterminal V_a erhalten wir die gewünschte Regelmenge P':

$$\begin{aligned} A_1 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid bV_a \\ A_2 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \\ A_3 &\to b \mid bB \\ B &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid bA_2B \mid bBA_2B \mid aB \\ V_a &\to a. \end{aligned}$$

Ein Pseudoterminal V_b ist in diesem Fall nicht nötig.

Dann ist $G' = (\{A_1, A_2, A_3, B, V_a\}, \{a, b\}, P', A_1)$ eine zu G äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform.

Hinweis: Alternativ kann man „durch scharfes Hinsehen“ erkennen, dass G genau die Sprache $L = L(a|b(a|b)^*a)$ erzeugt, und eine Grammatik für L in Greibach-Normalform konstruieren. Eine solche Grammatik wäre $G' = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to a \mid bT \\ T &\to aT \mid bT \mid a. \end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\alpha\#\beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^* \wedge \alpha \text{ ist Infix von } \beta\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, \#\}$ nicht kontextfrei ist.

Lösung

Wir verwenden das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $z = a^n b^n \# a^n b^n$. Dann gilt $z \in L$ und $|z| = 4n + 1 \geq n$. Seien nun $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$. Wir unterscheiden vier Fälle.

Fall 1: $|vx|_\# \geq 1$. Für $i = 0$ enthält uv^iwx^iy kein $\#$.

Fall 2: $|vx|_\# = 0$, $|u| < 2n$ und $|vx|_a \geq 1$. Für $i = 2$ ist $uv^iwx^iy = \alpha\#\beta$ für Wörter $\alpha, \beta \in \{a,b\}^*$. Aus $|vwx| \leq n$ folgt $|\alpha|_a > |\beta|_a$.

Fall 3: $|vx|_\# = 0$, $|u| < 2n$ und $|vx|_a = 0$. Für $i = 2$ ist $uv^iwx^iy = \alpha\#\beta$ für Wörter $\alpha, \beta \in \{a,b\}^*$. Aus $|vwx| \leq n$ folgt $|\alpha|_b > |\beta|_b$.

Fall 4: $|vx|_\# = 0$ und $|u| \geq 2n$. Für $i = 0$ ist $uv^iwx^iy = a^n b^n \# a^{n-k} b^{n-\ell}$ für Zahlen $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k + \ell \geq 1$.

In allen Fällen existiert ein $i \in \mathbb{N}$ für das uv^iwx^iy entweder kein $\#$ enthält oder die Form $\alpha\#\beta$ hat, wobei aber α kein Infix von β ist, was $uv^iwx^iy \notin L$ impliziert.

Präsenzaufgabe 8

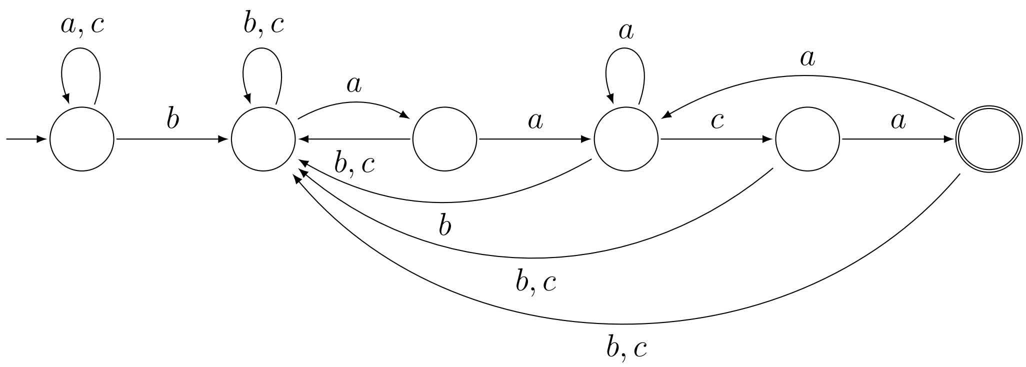
Modulprüfung *Theoretische Informatik I* vom Wintersemester 2017. Verfügbar unter:

`https://fmi.uni-stuttgart.de/files/ti/teaching/exams/TI1-2017-WS.pdf`

Lösung

Alle Lösungen ohne Gewähr. Fehlermeldungen bitte per E-Mail an mich. Danke!

1.



2. Der Beweis funktioniert ganz analog zum Beweis dafür, dass

$$L = \left\{ a^{3^k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

nicht regulär ist. Dies wurde in der ersten Präsenzaufgabe der Ergänzungen 8 (Pumping-Lemma) und 9 (Satz von Myhill-Nerode) gezeigt.

1. Ansatz: Mit dem Pumping-Lemma

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{4^n}$. Dann ist $x \in L$ mit $|x| = 4^n \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wegen (1) und (2) ist $v = a^j$ für ein $j \leq n$. Wegen (3) ist $j \geq 1$. Für $i = 2$ ist $uv^iw = uvvw = a^{3^n+j}$. Wegen

$$4^n < 4^n + 1 \leq 4^n + j \leq 4^n + n \leq 4^n + 4^n = 2 \cdot 4^n < 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$$

liegt $4^n + j$ echt zwischen 4^n und 4^{n+1}. Da die Folge $(4^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 16, 64, \ldots)$ der Viererpotenzen monoton wachsend ist, kann $4^n - j$ keine Viererpotenz sein, d. h. $uv^iw \notin L$.

2. Ansatz: Mit dem Satz von Myhill-Nerode

Betrachte die Menge $M = \left\{a^{4^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Dann ist $M \subseteq \Sigma^*$ mit $|M| = \infty$.

Seien $x, y \in M$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $x = a^{4^i}$ und $y = a^{4^j}$. O. B. d. A. sei $i < j$. Für $w = a^{3 \cdot 4^i}$ ist $xw = a^{4^i + 3\cdot 4^i} = a^{4 \cdot 4^i} = a^{4^{i+1}} \in L$, aber $yw = a^{4^j + 3 \cdot 4^i} = a^{4^i(4^{j-i}+3)} \notin L$, da $4^{j-i} + 3$ ungerade und somit $4^i(4^{j-i} + 3)$ keine Viererpotenz ist.

3. a) $\{q_0, q_4\}$. Kein Endzustand, da $\{q_3, q_7\} \cap \{q_0, q_4\} = \emptyset$.

   b) $\{q_0, q_1 q_4\}$. Kein Endzustand, da $\{q_3, q_7\} \cap \{q_0, q_1, q_4\} = \emptyset$.

   c) $\{q_5\}$. Kein Endzustand, da $\{q_3, q_7\} \cap \{q_5\} = \emptyset$.

   d) $\{q_2, q_7\}$. Endzustand, da $\{q_3, q_7\} \cap \{q_2, q_7\} = \{q_7\} \neq \emptyset$.

4. a) $w_1 = b$.

   b) $w_2 = a^3b^2$.

   c) $[aaa]_{R_L} = \{aaa\}$.

   d) Die Äquivalenzrelation R_L besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen.

5. a)

a	b	b	a
$\{A, C\}$	$\{C\}$	$\{C\}$	$\{A, C\}$
$\{B\}$	$\emptyset$	$\{C\}$	
$\{S\}$	$\emptyset$		
$\{S\}$			

   b) Ja / Nein

6.

1. regulär (Typ 3)
2. regulär (Typ 3)
3. deterministisch kontextfrei
4. kontextsensitiv (Typ 1)
5. kontextfrei (Typ 2)
6. kontextsensitiv (Typ 1)
7. regulär (Typ 3)
8. deterministisch kontextfrei
9. kontextsensititv (Typ 1)
10. regulär (Typ 3)

7. $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit folgenden Produktionen in P:

$$S \to Tabba$$
$$T \to TT \mid aTb \mid bTa \mid \varepsilon.$$

8. a) Nein / Ja / Ja / $\mathrm{stott}(L_3) = \{b^k a^\ell \mid k \geq 2 \wedge \ell \geq 0\}$

   b) Für jedes $a \in \Sigma$:

      1) Ersetze in jeder Produktion in G jedes a durch eine frische Variable V_a.

      2) Füge die Produktionen $V_a \to V_a a \mid a$ hinzu.

9. a) Ja / Nein / Nein / Ja

   b) 2

   c) Ja / Nein / Nein / Nein

   d) 6

   e) Nein / Nein / Ja / Nein

   f) 4

10. a) Ja. L_1 wird von dem regulären Ausdruck $\gamma = (a|b)^* a(a|b)^* a(a|b)^*$ beschrieben.

    b) Ja. L_2 wird von der kontextfreien Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit $P = \{S \to T \mid \varepsilon, T \to aTbb \mid abb\}$ erzeugt.

11. a) Nein / Nein

    b) $\varepsilon, a, b, ab, ba, bb$

    c) a, bb

    d) Für die Verknüpfungstafel schreiben wir der Übersichtlichkeit halber vereinfacht nur w statt $[w]_{\equiv_L}$, d. h. wir rechnen mit Vertretern:

$\cdot$	ε	a	b	ab	ba	bb
ε	ε	a	b	ab	ba	bb
a	a	ε	ab	b	bb	ba
b	b	ba	bb	a	ab	ε
ab	ab	bb	ba	ε	b	a
ba	ba	b	a	bb	ε	ab
bb	bb	ab	ε	ba	a	b

    Nein

Präsenzaufgabe 9

Modulprüfung *Theoretische Informatik I* vom Sommersemester 2018. Verfügbar unter:

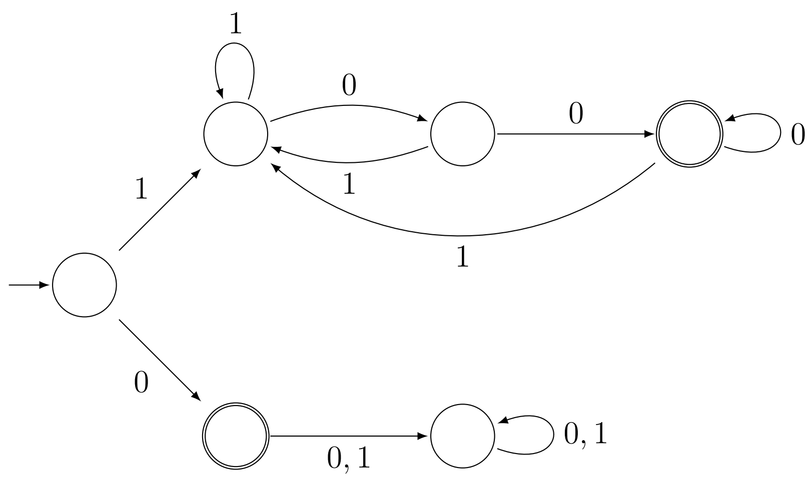
`https://fmi.uni-stuttgart.de/files/ti/teaching/exams/TI1-2018-SS.pdf`

Lösung

Alle Lösungen ohne Gewähr. Fehlermeldungen bitte per E-Mail an mich. Danke!

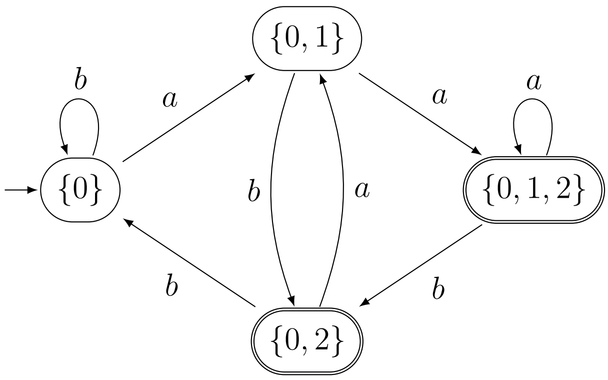
1. a) $\gamma = 0|1(0|1)^*00$

   b)



2. a) $\gamma = (a|b)^*a(a|b)$

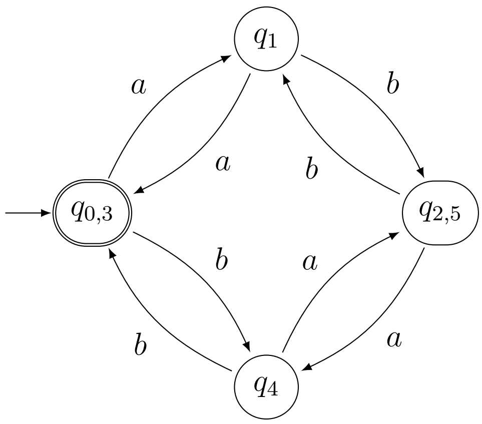
   b)



3. a)

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	ε				
q_2	ε	a			
q_3	R_L	ε	ε		
q_4	ε	a, b	b	ε	
q_5	ε	a	R_L	ε	b

b)



c) $|\Sigma^*/R_L| = 4$.

d) $[aba]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ gerade und } |w|_b \text{ ungerade}\}$.

e) Nein / Ja / Nein / Ja / Ja / Nein

4. a) $w_1 = ab$

b) $[aaba]_{R_L} = \{a^{n+1}ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

c) Nein. Für $w = baa$ gilt $aaw \in L$, aber $aaaw \notin L$.

d) Für $M = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt $M \subseteq \Sigma^*$ und $|M| = \infty$. Zu zeigen ist nur noch obige Implikation.

Seien $u, v \in M$ beliebig mit $u \neq v$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $u = a^i$, $v = a^j$ und $u \neq j$. Für $w = ba^i$ gilt $uw \in L$, aber $vw \notin L$.

e) Nein. Sei $M' = \{[a^n]_{R_L} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma^*/R_L$. Aus Teil d folgt $|M'| = \infty$ und somit $|\Sigma^*/R_L| = \infty$.

5. a) $L_{1,0} = \{b\}\{ab\}^* = \{ba\}^*\{b\}$
$L_{0,2} = \{ab\}^*\{b, aa\}\{a, b\}^*$

b) Wir zeigen, dass $L_{p,q}$ von einem DFA akzeptiert wird. Betrachte hierzu den DFA $M_{p,q} = (Q, \Sigma, \delta, p, \{q\})$. Dann gilt:

$$T(M_{p,q}) = \left\{ w \in \Sigma^* \,\middle|\, \hat{\delta}(p,q) \in \{q\} \right\} = L_{p,q}.$$

c) Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DFA für L. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{shift}(L) &= \left\{ w_2 w_1 \,\middle|\, \hat{\delta}(s, w_1 w_2) \in F \right\} \\
&= \left\{ w_2 w_1 \,\middle|\, \exists q \in Q, f \in F \colon \hat{\delta}(s, w_1) = q \wedge \hat{\delta}(q, w_2) = f \right\} \\
&= \{ w_2 w_1 \mid \exists q \in Q, f \in F \colon w_1 \in L_{s,q} \wedge w_2 \in L_{q,f} \} \\
&= \bigcup_{q \in Q, f \in F} L_{q,f} L_{s,q}.
\end{aligned}$$

Da die Klasse der regulären Sprachen unter Konkatenation und unter (endlicher) Vereinigung abgeschlossen ist, ist $\mathrm{shift}(L)$ regulär.

6. a)

a	a	b	a	b	b
$\{A,C\}$	$\{A,C\}$	$\{B\}$	$\{A,C\}$	$\{B\}$	$\{B\}$
$\{B\}$	$\{S,C\}$	$\{S,A\}$	$\{S,C\}$	$\emptyset$	
$\{B\}$	$\{B\}$	$\{S,C\}$	$\emptyset$		
$\{S,A,C\}$	$\{B\}$	$\emptyset$			
$\{S,C\}$	$\emptyset$				
$\emptyset$					

b) Nein. Folgt aus $S \notin T_{1,6}$.

c) $T_{i,j} = \{X \in V \mid X \Rightarrow^* a_i \ldots a_{i+j-1}\}$.

d) ab, ba, bab, $aaba$ und $aabab$.

7. a) $(q_1, abba, \#) \vdash (q_2, bba, A\#) \vdash (q_2, ba, \#) \vdash (q_1, ba, \#) \vdash (q_0, a, B\#) \vdash (q_0, \varepsilon, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$.

b) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.

c) Mögliche Begründungen (eine reicht):

- Es gilt: $|\delta(q_1, a, \#)| + |\delta(q_1, \varepsilon, \#)| = 2 \not\leq 1$.
- Es gilt: $|\delta(q_1, b, \#)| + |\delta(q_1, \varepsilon, \#)| = 2 \not\leq 1$.
- M besitzt keine Endzustandmenge, ist also nur ein 6-Tupel.

8. a) Angenommen, L wäre kontextfrei. Da $L(a^*b^*c^*)$ regulär ist und die Klasse der kontextfreien Sprachen unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen ist, wäre auch

$$L \cap L(a^*b^*c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

kontextfrei. Widerspruch!

Hinweis: Alternativ kann man das Pumping-Lemma verwenden. Der Beweis ist dann identisch zu dem von $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) Kontextfreie Grammatik

Die Grammatik $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit

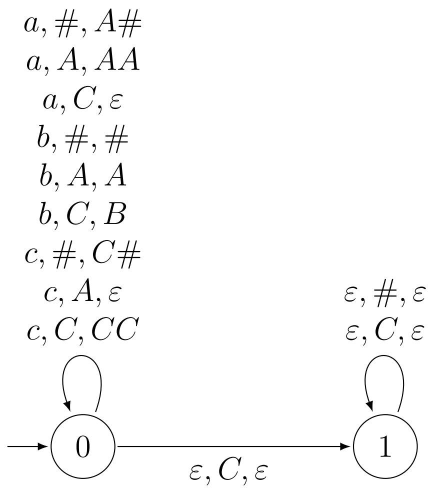
$$P = \{S \to TcT, T \to TT \mid aTc \mid cTa \mid bT \mid cT \mid \varepsilon\}$$

erzeugt $K_{a,c}$. Durch Beseitigung der Produktion $T \to \varepsilon$ erhält man eine kontextfreie Grammatik mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to TcT \mid cT \mid Tc \mid c \\ T &\to TT \mid aTc \mid ac \mid cTa \mid ca \mid bT \mid b \mid cT \mid c. \end{aligned}$$

Diese hält die ε-Sonderregel ein.

PDA



c) $\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \neq |w|_b \vee |w|_b \neq |w|_c\}$

d) Analog zur Konstruktion aus Teil b) lässt sich zeigen, dass

$$K_{x,y} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_x < |w|_y\}$$

für alle $x, y \in \Sigma$ mit $x \neq y$ kontextfrei ist. Wegen

$$\overline{L} = K_{a,b} \cup K_{b,a} \cup K_{a,c} \cup K_{c,a} \cup K_{b,c} \cup K_{c,b}$$

ist $\overline{L}$ auch kontextfrei.

e) Wäre $\overline{L}$ deterministisch kontextfrei, dann wäre auch $\overline{\overline{L}} = L$ deterministisch kontextfrei, was Teil a widerspricht.

9.

1. kontextsensitiv (Typ 1)
2. kontextsensitiv (Typ 1)
3. deterministisch kontextfrei
4. deterministisch kontextfrei
5. regulär (Typ 3)
6. deterministisch kontextfrei
7. deterministisch kontextfrei
8. deterministisch kontextfrei

Präsenzaufgabe 10

Modulprüfung *Theoretische Informatik I* vom Wintersemester 2018. Verfügbar unter:

`https://fmi.uni-stuttgart.de/files/ti/teaching/exams/TI1-2018-WS.pdf`

Lösung

Siehe Text auf der ersten Seite.

Präsenzaufgabe 11

Modulprüfung *Theoretische Informatik I* vom Sommersemester 2019. Verfügbar unter:

`https://fmi.uni-stuttgart.de/files/ti/teaching/exams/TI1-2019-SS.pdf`

Lösung

Siehe Text auf der ersten Seite.

Knobelaufgaben

Keine Knobelaufgaben.