Äquivalenzen

Idempotenz: $F \equiv (F \wedge F) \equiv (F \vee F)$

Kommutativität: $(F \wedge G) \equiv (G \wedge F) \quad (F \vee G) \equiv (G \vee F)$

Assoziativität: $((F \wedge G) \wedge H) \equiv (F \wedge (G \wedge H))$
$((F \vee G) \vee H) \equiv (F \vee (G \vee H))$

Absorption: $(F \wedge (F \vee G)) \equiv F \equiv (F \vee (F \wedge G))$

Distributivität: $(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$
$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$

Doppelnegation: $\neg\neg F \equiv F$

deMorgan-Regeln: $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G) \quad \neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$

Tautologie: Falls F eine Tautologie ist, gelten folgende Äquivalenzen:

$$(F \vee G) \equiv F \quad (F \wedge G) \equiv G$$

Unerfüllbarkeit: Falls F unerfüllbar ist, gelten folgende Äquivalenzen:

$$(F \vee G) \equiv G \quad (F \wedge G) \equiv F$$

Beweise

Wir geben hier nur exemplarisch drei Beweise an.

Bitte die übrigen Beweise selbst machen - evtl. auch in der Übung...

Zur Assoziativität:

$$\mathcal{A}((F \wedge G) \wedge H) = \min(\min(\mathcal{A}(F), \mathcal{A}(G)), \mathcal{A}(H)) = \min(\mathcal{A}(F), \mathcal{A}(G), \mathcal{A}(H)) \text{ und}$$

$$\mathcal{A}(F \wedge (G \wedge H)) = \min(\mathcal{A}(F), \min(\mathcal{A}(G), \mathcal{A}(H))) = \min(\mathcal{A}(F), \mathcal{A}(G), \mathcal{A}(H)), \ \vee \text{ analog}$$

Zur Absorption:

Am einfachsten mit Fallunterscheidung, je nachdem, ob $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ oder $\mathcal{A}(F) < \mathcal{A}(G)$ oder $\mathcal{A}(F) > \mathcal{A}(G)$.

deMorgan-Regeln:

$$\mathcal{A}(\neg(F \wedge G)) = 1 - \mathcal{A}(F \wedge G) = 1 - \min(\mathcal{A}(F), \mathcal{A}(G))$$
$$= \max(1 - \mathcal{A}(F), 1 - \mathcal{A}(G)) = \max(\mathcal{A}(\neg F), \mathcal{A}(\neg G))$$
$$= \mathcal{A}(\neg F \vee \neg G),$$ analog für die 2. Regel

Assoziativität und Klammerung

Im Allgemeinen geht es uns bei Formeln um deren Bedeutung, und nicht so sehr um die syntaktische Form.

Daher kann man sich normalerweise erlauben, Klammerungen bei zusammengesetzten $\wedge$ oder $\vee$ Formeln (bzw. Teilformeln) einfach wegzulassen.

Beispiel: Wir schreiben $A \vee B \vee C$ sowohl für $((A \vee B) \vee C)$ als auch für $(A \vee (B \vee C))$.

Achtung: Nicht zu großzügig Klammern weglassen!
Was wäre z.B. mit $A \wedge B \vee C$?

Normalformen

Wir wollen die *disjunktive* und die *konjunktive* Normalform einführen.

Hierzu benötigen wir den Begriff des *Literals:*

Ein *positives Literal* ist eine atomare Formel.

Ein *negatives Literal* ist die Negation einer atomaren Formel.

Def.: Eine Formel F ist *in disjunktiver Normalform (DNF)*, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.

Die Formel F ist *in konjunktiver Normalform (KNF)*, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Wir betrachten die Formel $F = (A \wedge \neg B) \vee \neg C$. Ist F eine DNF, KNF oder beides?
Dasselbe für die Formel $G = A \wedge \neg B \wedge C$. Ist F eine DNF, KNF oder beides?

Satz (DNF/KNF)

Satz: Zu jeder Formel F existieren äquivalente Formeln in DNF und in KNF.

Den Beweis führen wir durch Induktion über den Aufbau von F.

Induktionsanfang:

Wenn F eine atomare Formel ist, dann ist F automatisch bereits sowohl eine DNF als auch eine KNF.

Für den Induktionsschritt unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem, wie F aus einfacheren Formeln G und ggfs. H gebildet worden ist: $F = \neg G$, $F = G \wedge H$ oder $F = G \vee H$.

Der Fall $F = \neg G$ bleibt als Übung (deMorgan-Regeln benutzen).

Zum Induktionsschritt:

Jetzt sei F von der Form $F = (G \wedge H)$.

G habe DNF G' und KNF G'', H habe DNF H' und KNF H''.

Eine KNF für F erhält man ganz leicht aus G'' und H''.

Wir zeigen, wie man aus G' und H' eine DNF für F erhält:

Sei $G' = \bigvee \bigwedge L_{ij}$ und $H' = \bigvee \bigwedge R_{\mu\nu}$.

(Grenzen der $\bigvee$- und $\bigwedge$-Operatoren sind zugunsten der Übersichtlichkeit unterdrückt.)

Damit $F \equiv (\bigvee \bigwedge L_{ij}) \wedge (\bigvee \bigwedge R_{\mu\nu})$

$\equiv \bigvee \bigvee \bigwedge L_{ij} \wedge (\bigwedge R_{\mu\nu})$ Erweitertes Distributivgesetz

$\equiv \bigvee \bigwedge (L_{ij} \wedge R_{\mu\nu})$ Assoziativität und Distribut.

Die letzte Formel ist eine DNF für F.

Wenn F von der Form $(G \vee H)$ ist, verfährt man analog.

KNF-Algorithmus

Man kann eine KNF wie folgt direkt erzeugen:

1. Schritt: Negationen *nach innen* schieben (deMorgan) und dabei Doppelnegationen eliminieren.

2. Schritt: Zweites Distributivgesetz nutzen, um $\vee$-Operationen an $\wedge$-Operatoren vorbei nach innen zu schieben.

(Voraussetzung: Die Ausgangsformel ist nur mit Operatoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ gebildet.)

Beispiel:
$$
\begin{aligned}
&(\neg(A \wedge \neg(C \vee \neg B)) \vee \neg(\neg D \vee (B \wedge A))) \\
&\equiv (\neg(A \wedge (\neg C \wedge B)) \vee (D \wedge \neg(B \wedge A))) \\
&\equiv ((\neg A \vee (C \vee \neg B)) \vee (D \wedge (\neg B \vee \neg A))) \\
&\equiv (\neg A \vee C \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B \vee \neg B \vee \neg A)
\end{aligned}
$$

Diese letzte Formel ist in KNF!

KNF aus der Wahrheitstafel

Man kann eine KNF auch direkt aus der Wahrheitstafel generieren:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Um eine KNF für die Formel F zu erhalten, schließen wir mit einer Konjunktion alle Fälle aus, in denen F den Wert 0 annimmt.
Zu vermeiden sind also die erste, die vierte und die letzte Zeile!
Um z.B. die erste Zeile zu vermeiden, muss eine der atomaren Formeln den Wert 1 annehmen.
Also erhalten wir die Disjunktion $(A \vee B \vee C)$, aus der 4. Zeile entsprechend $(A \vee \neg B \vee \neg C)$, und aus der letzten Zeile $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$.
Damit lautet die gesuchte KNF wie folgt:

$$F \equiv F' = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

DNF aus der Wahrheitstafel

Analog ist auch eine DNF direkt aus der Wahrheitstafel generierbar:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Für die DNF müssen wir umgekehrt die positiven Fälle aussuchen und mit ODER verknüpfen:

Die 2. Zeile liefert $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

Die 3. Zeile liefert $(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$

Die 5. Zeile liefert $(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

Die 6. Zeile liefert $(A \wedge \neg B \wedge C)$

Die 7. Zeile liefert $(A \wedge B \wedge \neg C)$

Damit erhalten wir die folgende DNF:

$$F \equiv F' = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$