Ergänzung 1

Hinweise:

- In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wir verwenden die erste.
- Weitere wichtige Zahlenmengen sind

  die Quadratzahlen $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$,

  die Kubikzahlen $\{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 8, 27, 64, \ldots\}$,

  die Zweierpotenzen $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$,

  die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

  die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,

  die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
- Für ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir die *Teilbarkeitsrelation* wie folgt:

$$x \text{ teilt } y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon y = k \cdot x.$$

- Für eine positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir die *Kongruenzrelation modulo* n wie folgt:

$$x \equiv y \mod n \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon y = x + k \cdot n.$$

  Die Kongruenzrelation modulo n soll nicht verwechselt werden mit der modulo-Operation $x \bmod n = x - n \cdot \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$. Das Eine ist eine Relation und das Andere eine Operation!

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe):
Welche der folgenden Schlüsse sind richtig?

1. Luca ist in der Vorlesung oder im Fitnessstudio. In der Vorlesung ist er nicht. Also ist er im Fitnessstudio.
2. Wenn Anne nicht lernt, besteht sie nicht. Sie hat bestanden. Also hat sie gelernt.
3. Wer seinen Brokkoli nicht aufisst, kriegt keinen Nachtisch. Der kleine Timmy hat (mit Mühe und Not) seinen Brokkoli aufgegessen. Also kriegt Timmy Nachtisch.
4. Wenn Sandra lernt, isst sie Schokolade. Wenn sie keine Schokolade isst, ist sie unglücklich. Sie lernt. Also ist sie glücklich.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe):
Gegeben seien Aussagen $A(x)$ und $B(x)$ über eine beliebige reelle Zahl x. Welche Aussage impliziert welche?

1. $A(x)\colon x > 10$ und $B(x)\colon x \geq 9$
2. $A(x)\colon x \leq -5$ und $B(x)\colon x \geq -4$
3. $A(x)\colon x^2 \geq 25$ und $B(x)\colon x \geq 5$
4. $A(x)\colon |x| \leq 4$ und $B(x)\colon -4 \leq x \leq 4$
5. $A(x)\colon |x-5| \leq 4$ und $B(x)\colon x \geq 0$

Hinweis: $a \leq x \leq b$ ist eine Kurzschreibweise für $a \leq x \wedge x \leq b$.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe):
Formulieren Sie folgende Aussagen mithilfe der Symbole

$$\in,\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{R},\ \forall,\ \exists,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \implies \text{ und } \iff .$$

1. Jede reelle Zahl ist kleiner als mindestens eine natürliche Zahl.
2. Eine ganze Zahl ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn sie positiv oder null ist.
3. Eine natürliche Zahl, die von einer von ihr verschiedenen natürlichen Zahl größer als 1 geteilt wird, ist nicht prim.
4. Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen.
5. Die Differenz zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe):
Zeigen Sie für beliebige $x, y, z \in \mathbb{Z}$: Aus x teilt y und y teilt z folgt x teilt z.

Aufgabe 5:
Beweisen oder widerlegen Sie, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ in einer der Mengen $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ als Teilmenge enthalten ist.

1. $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq n^2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zusatzaufgabe:

3. $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe):
Zeigen Sie für beliebige Zahlen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$: Wenn $x \equiv y \mod n$ und $y \equiv z \mod n$ gelten, dann gilt auch $x \equiv z \mod n$.