Ergänzung 2

Hinweise:

- In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wir verwenden die erste.
- Für beliebige Sprachen A und B gilt:

  $$AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

  $$A^0 = \{\varepsilon\} \text{ und } A^n = AA^{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

  $$A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

  $$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

  Daraus folgt:

  $$A^n = \{u_1 \ldots u_n \mid u_1, \ldots, u_n \in A\}$$

  $$A^+ = \{u_1 \ldots u_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge u_1, \ldots, u_n \in A\}$$

  $$A^* = \{u_1 \ldots u_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge u_1, \ldots, u_n \in A\}$$

  mit $u_1 \ldots u_n = \varepsilon$ für $n = 0$.

Aufgabe 1:
Gegeben seien die Sprachen $A = \{\varepsilon, ab\}$, $B = \{a, bb\}$ und $C = \{a, ba\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine Mengendarstellung folgender Sprachen (ggf. in Abhängigkeit von einem $n \in \mathbb{N}$) an.

1. $AC \cap BC$
2. $(A \cap B)C$
3. B^3
4. C^*
5. $\emptyset^+$
6. $\emptyset^*$

Zusatzaufgaben:

7. A^2
8. ABC
9. CBA
10. $(B \cap C)^+$
11. A^*
12. $(B \cup C)^2$

Aufgabe 2:
Seien Σ ein Alphabet und $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ Sprachen über Σ. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Wenn $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$, dann $AC \subseteq BD$.
2. $(A \cap B)C \subseteq AC \cap BC$.

Zusatzaufgabe:

3. Es gilt $\varepsilon \in A$ genau dann, wenn $A^+ = A^*$.

Aufgabe 3 (Zusatzaufgabe):
Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

1. Sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5\}$. Geben Sie eine Mengendarstellung von L^n an.
2. Sei $L_n = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n \wedge |w|_b = 2\}$. Bestimmen Sie $|L_n|$ in Abhängigkeit von n.

Beweisen Sie Ihre Aussagen mit vollständiger Induktion, siehe Einheit 4.

Hinweise:

- $|w|$ bezeichnet die Länge des Wortes w (z. B. $|abbab| = 5$).
- $|w|_x$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens x im Wort w (z. B. $|abbab|_b = 3$).

Aufgabe 4:
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L jeweils eine Variablenmenge V mit $S \in V$ und eine Produktionsmenge P, so dass $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik ist, die die entsprechende Sprache erzeugt.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommen zwei } b\text{s nebeneinander vor}\}$
2. $L = \{a^m b^n \mid m < n\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \mod 2\}$

Zusatzaufgabe:

4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

Hinweise:

- Beachten Sie die ε-Sonderregel auf Folie 05.1.
- Für die Definition von $x \equiv y \mod n$ siehe Ergänzung 1, Aufgabe 6.

Aufgabe 5:
Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken $G = (V, \Sigma, P, S)$ an, von welchen Typen sie ist. Geben Sie außerdem die von G erzeugte Sprache $L(G)$ an.

1. $G = (\{S, T, U\}, \{a, b, c\}, \{S \to TU, T \to aTb \mid \varepsilon, U \to bUc \mid \varepsilon\}, S)$
2. $G = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, \{S \to T \mid \varepsilon, T \to aT \mid a \mid bU, U \to bU\}, S)$
3. $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to aB \mid bA, A \to aB, B \to bA\}, S)$

Zusatzaufgabe:

4. $G = (\{S, T, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{&S \to T \mid \varepsilon, \\ &T \to ABCT \mid ABC, \\ &AB \to BA, BA \to AB, \\ &AC \to CA, CA \to AC, \\ &BC \to CB, CB \to BC, \\ &A \to a, B \to b, C \to c)\}. \end{aligned}$$

Hinweis: $u \to v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n$ ist eine alternative Schreibweise für $(u, v_1), (u, v_2), \ldots, (u, v_n)$.

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe):
Sei Σ ein Alphabet. Für Wörter $v, w \in \Sigma^*$ über Σ definieren wir:

$$v \text{ ist Teilwort von } w \iff \exists x, y \in \Sigma^* \colon w = xvy.$$

Zeigen Sie für beliebige Wörter $v, w \in \Sigma^*$: Ist v ein Teilwort von w und w ein Teilwort von v, dann sind sie gleich.

Hinweis: Einige Autoren nennen Teilwörter auch *Faktoren*.