Ergänzung 3

Hinweis: In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wir verwenden die erste.

Aufgabe 1:
Seien $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit $V = \{S, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to aTb \mid aSba \mid b, T \to aT \mid bTb \mid bbSa \mid a\}$$

und $x = ababb$ ein Wort aus Σ^*.

1. Verwenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung (Folie 05.4), um das Wortproblem für G und x zu entscheiden.
2. Im Rahmen dieses Übungsblattes nennen wir eine Grammatik (V, Σ, P, S) *linear*, falls für jede Produktion $(u, v) \in P$ gilt: $u \in V$ und $v \in \Sigma^* V \Sigma^* \cup \Sigma^*$.

   Ist G linear?
3. In den Hausaufgaben haben Sie bewiesen, dass der Algorithmus aus der Vorlesung im Allgemeinen exponentielle Laufzeit hat. Verändern Sie ihn so, dass er das Wortproblem für lineare Grammatiken in quadratischer Zeit löst. Zeigen Sie die quadratische Laufzeit Ihres Algorithmus, indem Sie $|T| \leq an^2 + bn + c$ für $n = |x|$ und beliebige Konstanten $a, b, c > 0$ zeigen.

Zusatzaufgabe:

4. Verwenden Sie nun den veränderten Algorithmus, um das Wortproblem für G und x zu entscheiden.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe):
Sei $G = (V, \Sigma, P, T)$ eine Grammatik mit $V = \{T\}$, $\Sigma = \{+, \cdot, x, y, z\}$ und

$$P = \{T \to T + T \mid T \cdot T \mid x \mid y \mid z\}$$

1. Geben Sie eine Linksableitung und den zugehörigen Syntaxbaum für $x + y \cdot z$ an.
2. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist.
3. Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$.
4. Zeigen Sie durch Angabe einer eindeutigen Grammatik, dass die von G erzeugte Sprache nicht inhärent mehrdeutig ist.

Aufgabe 3:
Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L graphisch jeweils einen möglichst einfachen deterministischen endlichen Automaten $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $T(M) = L$ an.

1. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid ab \text{ ist ein Suffix von } w\}$
2. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid abb \text{ ist ein Teilwort von } w\}$
3. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \equiv 1 \mod 5 \vee |w|_a \equiv 3 \mod 5\}$

Zusatzaufgaben:

4. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade und } |w|_b \text{ ungerade}\}$
5. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a + |w|_b \equiv 1 \bmod 3\}$
6. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a \geq 1 \wedge |w|_b \geq 1 \wedge |w|_c \geq 1\}$
7. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ oder } |w|_b \text{ ist gerade}\}$
8. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a - |w|_b \equiv 2 \bmod 3\}$
9. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid abb \text{ ist Präfix von } w\}$
10. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid aba \text{ ist kein Teilwort von } w\}$
11. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a = 2 \wedge |w|_b = 1\}$
12. $L = \{a^m b^n \mid m \equiv 0 \mod 2 \wedge n \equiv 0 \mod 2\}$
13. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid ab \text{ ist ein Präfix und } ba \text{ ein Suffix von } w\}$
14. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a \geq 2 \vee |w|_b \geq 2 \vee |w|_c \geq 2\}$
15. $L = \{a,b\}^2 \{b\} \{a,b\}^* = \left\{ubv \;\middle|\; u \in \{a,b\}^2 \wedge v \in \{a,b\}^*\right\}$
16. $L = \{a,b\}^* \{b\} \{a,b\}^2 = \left\{ubv \;\middle|\; u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{a,b\}^2\right\}$

Hinweise:

- Wir betrachten in der Regel ausschließlich vollständige DEAs. Graphisch bedeutet das, dass von jedem Zustand für jedes $x \in \Sigma$ genau eine x-Kante ausgehen muss.
- Für Wörter u, v über einem Alphabet Σ gilt:

$$\begin{array}{lcl} v \text{ ist } \textit{Suffix} \text{ von } w & \iff & \exists u \in \Sigma^* \colon w = uv \\ v \text{ ist } \textit{Präfix} \text{ von } w & \iff & \exists u \in \Sigma^* \colon w = vu \\ v \text{ ist } \textit{Teilwort} \text{ (oder } \textit{Faktor}\text{) von } w & \iff & \exists u_1, u_2 \in \Sigma^* \colon w = u_1 v u_2 \end{array}$$

- Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$x \equiv y \mod n \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon y = x + k \cdot n \iff n \text{ teilt } y - x.$$

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe):
Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $A = \{a, b, ab\}$ und $B = \{b, ab, bab\}$ zwei Sprachen über Σ. Geben Sie zu jeder der folgenden Mengen L eine möglichst einfache Mengendarstellung an.

1. $L = AB$
2. $L = A \times B$
3. $L = A^2$
4. $L = A \cap B$
5. $L = A \cup B$
6. $L = A \setminus B$
7. $L = AB \cap A^2$
8. $L = A^2 \setminus AB$
9. $L = \{a\}^*\{bbb\}\{a\}^*$
10. $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \in A \wedge w \in A^2\}$
11. $L = \{w \in B^* \mid |w| = 3\}$
12. $L = \{w \in B^* \mid |w|_b = 2\}$
13. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* \colon vwv = wv^2w\}$
14. $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \{0, 1, 2\}\}$
15. $L = \{(a^n b)^n \mid n \in \{0, 1, 2\}\}$
16. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in A \colon vw \in B\}$
17. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* \colon wv \in A\}$
18. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* \colon uwv \in B\}$

Erinnerung: Für beliebige Mengen A und B gilt:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} && \text{(Schnitt)} \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} && \text{(Vereinigung)} \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} && \text{(Differenz)} \end{aligned}$$

Hinweis: Analog zur Exponentiation von Sprachen gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $w \in \Sigma^*$:

$$w^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{für } n = 0 \\ ww^{n-1} & \text{für } n > 1. \end{cases}$$