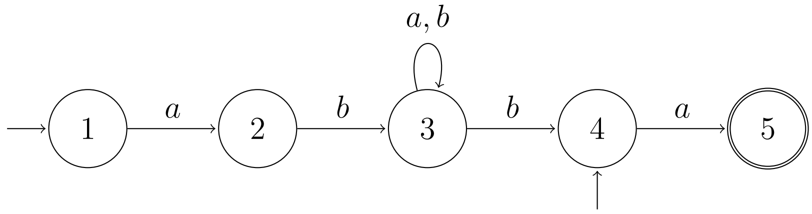
Ergänzung 4

Hinweise:

- In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wir verwenden die Erste.
- In diesem Übungsblatt dürfen Sie bei regulären Ausdrücken Klammern weglassen, wenn klar ist, was gemeint ist. Beispielsweise dürfen Sie ab^*c für $a(b)^*c$ und $a|b|c$ für $(a|b)|c$ schreiben. Der Stern soll dabei stärker als die Konkatenation und die Konkatenation stärker als die Alternative binden.

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe):
Gegeben sei der folgenden NEA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$:



1. Geben Sie Z, Σ, S und E als Mengen und δ als Tabelle an.
2. Bestimmen sie $\hat{\delta}(\{1, 4\}, ab)$.
3. Geben Sie eine Mengendarstellung von $T(M)$ an.
4. Geben Sie graphisch einen DEA M' mit $T(M) = T(M')$ an. Gehen Sie dabei analog zum Beweis des Satzes von Rabin und Scott vor. Nicht erreichbare Zustände müssen nicht gezeichnet werden.

   Hinweis: In der Regel betrachten wir ausschließlich vollständige DEAs. Graphisch bedeutet das, dass von jedem Zustand für jedes $x \in \Sigma$ genau eine x-Kante ausgehen muss.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe):
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass folgende Sprachen über Σ nicht regulär (d. h. nicht vom Typ 3) sind.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a < |w|_b\}$
2. $L = \left\{w \in \Sigma^* \,\middle|\, w = w^R\right\}$

   Hinweis: w^R ist das zu w gespiegelte Wort, z. B. $(abc)^R = cba$.

Aufgabe 3:
Geben Sie für jede Sprache L über $\Sigma = \{a, b\}$ jeweils einen regulären Ausdruck an.

1. $L = \{a^m b^n \mid m \text{ gerade und } n \text{ ungerade}\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ ist ein Suffix von } w\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 1 \text{ mod } 3\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der dritte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 3\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ oder } |w|_b \text{ ist gerade}\}$

Zusatzaufgaben:

7. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1 \wedge |w|_b \geq 1\}$
8. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der drittletzte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
9. $L = \{w \in \Sigma^* \mid abb \text{ ist ein Teilwort von } w\}$
10. $L = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ ist ein Präfix und } ba \text{ ein Suffix von } w\}$
11. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 2 \vee |w|_b \geq 2\}$
12. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \mod 3 \vee |w|_a \equiv 1 \mod 3\}$

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe):
Sei Σ ein Alphabet. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ bezeichne $[\![L]\!]$ die Sprache, die aus allen Wörtern $w \in L$ besteht, wobei in w jeder Buchstabe durch ein beliebiges Vielfaches von sich selbst ersetzt wird. Formal:

$$[\![L]\!] = \{x \in \{a_1\}^* \ldots \{a_n\}^* \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a_1, \ldots, a_n \in \Sigma \text{ mit } a_1 \ldots a_n \in L\}\,.$$

Dabei sei die leere Konkatenation von Sprachen gleich $\{\varepsilon\}$ und die leere Konkatenation von Wörtern gleich ε.

1. Sei $L = \{ab, ac, bc\}$. Welche der Wörter $bbbcc$, bba, $aabbbc$, ccc und ε sind in $[\![L]\!]$? Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung für $[\![L]\!]$ an.
2. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B:
   (a) $[\![AB]\!] = [\![A]\!][\![B]\!]$
   (b) $[\![A \cup B]\!] = [\![A]\!] \cup [\![B]\!]$
   (c) $[\![A^*]\!] = [\![A]\!]^*$
3. Sei $\gamma = \varepsilon|ab|c(ab)^*$ ein regulärer Ausdruck. Geben Sie einen regulären Ausdruck γ' für $[\![L(\gamma)]\!]$ an.
4. Zeigen Sie, dass für jeden regulären Ausdruck γ ein regulärer Ausdruck γ' existiert mit $[\![L(\gamma)]\!] = L(\gamma')$.
5. Zeigen Sie: Für jede reguläre Sprache L ist $[\![L]\!]$ regulär.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe):
Wahr oder falsch? Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen stimmt oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort kurz.

In dieser Aufgabe sind keine Beweise erforderlich, aber die Begründungen sollten sich auf die formale Definitionen der jeweiligen Objekte beziehen und nicht auf deren intuitive Bedeutung.

1. Jede Sprache ist eine Menge.
2. Für jede Menge A gilt $\emptyset \in A$.
3. Es gilt $|\{\emptyset\}| = 0$.
4. Für jede Sprache A gilt $\varepsilon \in A^*$.
5. Für jede Sprache A gilt $A^* = A^+ \cup \{\varepsilon\}$.
6. Für jede Sprache A gilt $A^* \setminus \{\varepsilon\} = A^+$.
7. Für jedes Alphabet Σ gilt $\varepsilon \in \Sigma$.
8. Für jede Sprache A ist $|A^*|$ unendlich.
9. Für beliebige endliche Sprachen A, B gilt $|AB| = |A||B|$.
10. Für beliebige Wörter u, v gilt $|uv| = |u||v|$.
11. Für jedes Wort w und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $|w^n| = |w|^n$.
12. Alle Wörter in A^+ haben für $A = \{\varepsilon, ab, abab\}$ gerade Länge.
13. Alle Wörter in A^+ haben für $A = \{b, aba, bab\}$ ungerade Länge.
14. Es gilt $abbaa \in \{a, abb, aba, baa\}\{a, b, aa, bba\}$.
15. Es gilt $aabba \in \{a\}^*\{b\}^*$.
16. Es gilt $bbaaba \in \{aa, bb\}\{a\}^*\{ab, ba\}$.
17. Es gilt $aababab \in \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 2\}^2$.
18. Es gilt $abbaab \in \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 2\}\,\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b = 2\}$.
19. Es gilt $aaabbb \in \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} \cap \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a < |w|_b\}$.
20. Es gilt $aaabb \in \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}\,\{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

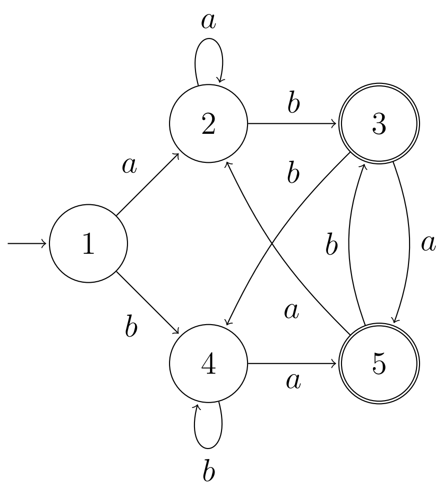
Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe):
Sei $\Sigma = \{a, b\}^*$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen eine Mengendarstellung

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid A(w)\}$$

an, wobei $A(w)$ eine beliebige (möglichst einfache) Aussage über w sein soll.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid 2 \leq |w|_a \leq 3\}^5$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 5\}^{10}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = 3\}^+$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 7\}^*$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = |w|_a + 2\}^4$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}^3$

Aufgabe 7 (Zusatzaufgabe):
Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der folgende DEA:



1. Geben Sie Z, Σ und E explizit als Mengen an.
2. Bestimmen Sie $\delta(3, b)$, $\hat{\delta}(2, \varepsilon)$ und $\hat{\delta}(1, ab)$.
3. Geben Sie eine Mengendarstellung der Sprache $T(M)$ an.