Ergänzung 5

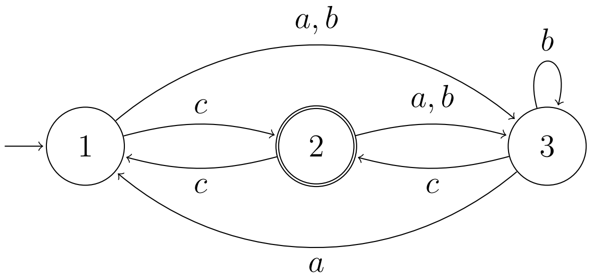
Hinweis: Auch in diesem Übungsblatt werden bei regulären Ausdrücken Klammern weglassen, wenn klar ist, was gemeint ist. Beispielsweise wird ab^*c für $a(b)^*c$ und $a|b|c$ für $(a|b)|c$ geschrieben. Der Stern soll dabei stärker als die Konkatenation und die Konkatenation stärker als die Alternative binden, z. B. $a|bc^* = (a|b(c)^*)$.

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe):
Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DEA. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ heißt *synchronisierend* bezüglich M, falls gilt:

$$\exists z \in Z \colon \forall z' \in Z \colon \hat{\delta}(z', w) = z.$$

Sei $\text{sync}(M)$ die Menge aller synchronisierenden Wörter bezüglich M.

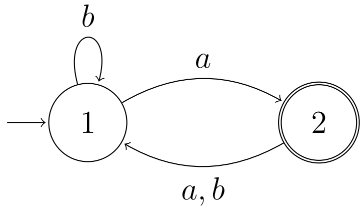
1. Welche der Wörter abc, aaa, $aacc$ und cab sind synchronisierend bezüglich des folgenden DEA?



2. Sei M der DEA aus Teilaufgabe 1. Geben Sie einen DEA für $\text{sync}(M)$ an.

3. Zeigen Sie, dass $\text{sync}(M)$ für jeden DEA M regulär ist.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe):
Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der folgende DEA:



Berechnen Sie mithilfe des Beweises vom Satz von Kleene einen regulären Ausdruck γ für $T(M)$.

Hinweise:

- Sie dürfen in dieser Aufgabe die berechneten Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ vereinfachen, d. h. durch äquivalente Ausdrücke ersetzen, die kürzer sind, und mit den vereinfachten Ausdrücken weiterrechnen.
- Zwei reguläre Ausdrücke α und β heißen *äquivalent* (in Zeichen $\alpha \equiv \beta$), wenn sie dieselbe Sprache beschreiben, d. h.:

$$\alpha \equiv \beta \iff L(\alpha) = L(\beta).$$

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe):
Betrachten Sie folgendes Kartenspiel:

Zuerst notieren Sie auf ein Blatt Papier eine Folge von Anweisungen. Dann legt Ihr Gegner drei Spielkarten nebeneinander auf den Tisch, jeweils auf- oder zugedeckt, und führt nacheinander die Anweisungen aus.

Mögliche Anweisungen sind:

a: Ihr Gegner dreht alle drei Karten um.

b: Ihr Gegner dreht zwei benachbarte Karten seiner Wahl um.

c: Ihr Gegner dreht die zwei äußeren Karten um.

Sie gewinnen das Spiel, sobald alle drei Karten aufgedeckt sind. In diesem Fall ignoriert der Gegner alle weiteren Anweisungen.

1. Modellieren Sie das Spiel als NEA M über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.
2. Gibt es eine Folge s von Anweisungen, mit der man das Spiel mit Sicherheit gewinnt? Überprüfen Sie dies mithilfe des Satzes von Rabin und Scott.

   Hinweis: Beachten Sie, dass Sie nicht den gesamten Automaten konstruieren müssen.

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe):
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jeden der folgenden regulären Audrücke γ über Σ, wenn möglich, 5 Wörter an, die jeweils innerhalb bzw. außerhalb der von γ beschriebenen Sprache $L(\gamma)$ liegen. Die Länge der gewählten Wörter soll möglichst klein sein.

1. $\gamma = (ab)^*$
2. $\gamma = (aa|bb)^*$
3. $\gamma = (a|b)^*a(a|b)^*$
4. $\gamma = a^*b^*$
5. $\gamma = (a^*b^*)^*$
6. $\gamma = b^*(\varepsilon|a|aa)b^*$

Aufgabe 5 (Knobelaufgabe):
Die *Černý-Vermutung* besagt, dass $(n-1)^2$ eine obere Schranke für die Länge des kürzesten synchronisierenden Wortes eines DEA mit n Zuständen ist (vgl. Aufgabe 1). Sie wurde 1964 vom Mathematiker Jan Černý aufgestellt und ist bis heute ein offenes Problem der theoretischen Informatik.

Falls $(n-1)^2$ tatsächlich eine obere Schranke ist, kann man zeigen, dass diese *scharf* ist, indem man für jedes $n \geq 1$ einen DEA mit n Zuständen angibt, bei dem das kürzeste synchronisierende Wort genau die Länge $(n-1)^2$ hat.

Geben Sie einen DEA M mit $n = 3$ Zuständen an, sodass das kürzeste synchronisierende Wort w bezüglich M genau die Länge $(n-1)^2 = 4$ besitzt. Wie sieht dann w aus? Lässt sich diese Konstruktion für ein beliebiges n verallgemeinern?