Ergänzung 6

Hinweis: In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wir verwenden die erste.

Aufgabe 1:
Seien S eine Menge, $\circ$ eine binäre Verknüpfung. $(S, \circ)$ heißt

- *Magma*, falls S unter $\circ$ abgeschlossen ist, d. h.:
$$\forall x, y \in S\colon x \circ y \in S.$$
- *Halbgruppe*, falls $(S, \circ)$ ein Magma ist und $\circ$ assoziativ ist, d. h.:
$$\forall x, y, z \in S\colon (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$
- *Monoid*, falls $(S, \circ)$ eine Halbgruppe ist und ein neutrales Element existiert, d. h.:
$$\exists e \in S\colon \forall x \in S\colon x \circ e = x = e \circ x.$$
Das neutrale Element e ist dann eindeutig und wird oft mit 1 notiert.
- *Gruppe*, falls $(S, \circ)$ ein Monoid ist und jedes Element ein Inverses hat, d. h.:
$$\forall x \in S\colon \exists y \in S\colon x \circ y = 1 = y \circ x.$$
Das Inverse y zu x ist dann eindeutig und wird oft mit x^{-1} notiert.
- *kommutativ*, falls gilt:
$$\forall x, y \in S\colon x \circ y = y \circ x.$$

Hinweis: Sehr oft wird eine algebraische Struktur $(S, \circ)$ mit ihrer Trägermenge S identifiziert. Man schreibt dann S und meint dabei $(S, \circ)$, z. B. Σ^* statt $(\Sigma^*, \cdot)$. Des Weiteren schreibt man oft xy statt $x \circ y$.

1. Gegeben seien die Paare $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{N}, \max)$, $(\mathbb{N}, \min)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ und $(\{a, b\}^*, \cdot)$. Welche davon sind Magmen/Halbgruppen/Monoide/Gruppen? Welche davon sind kommutativ?
2. Sei $(S, \circ)$ eine endliche Halbgruppe mit $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ als Trägermenge und der rechtsstehenden Verknüpfungstafel für $\circ$.
   (a) Ist $(S, \circ)$ ein Monoid?
   (b) Ist $(S, \circ)$ eine Gruppe?
   (c) Ist $(S, \circ)$ kommutativ?
   Begründen Sie kurz Ihre Antworten.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f	d	c	a	b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a	b	e	f	d
f	b	c	a	f	d	e

Zusatzaufgabe:

3. Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $x \circ y := 2x + 2y + xy + 2$ ist ein Monoid, aber keine Gruppe.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe):
Seien $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ zwei Monoide mit neutralen Elementen 1_M und 1_N. Eine Funktion $\varphi\colon M \to N$ heißt (Monoid-)*Homomorphismus*, wenn gilt:

$$\varphi(1_M) = 1_N \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in M\colon \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y).$$

1. Geben Sie einen Homomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ an.
2. Geben Sie einen Homomorphismus zwischen $(\{a, b\}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{N}, +)$ an.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe):
Eine binäre Relation $\sim$ auf einer Menge S heißt *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

- $\sim$ *reflexiv*, d. h.: $\forall x \in S\colon x \sim x$
- $\sim$ *symmetrisch*, d. h.: $\forall x, y \in S\colon x \sim y \implies y \sim x$
- $\sim$ *transitiv*, d. h.: $\forall x, y, z \in S\colon (x \sim y \wedge y \sim z) \implies x \sim z$

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Beweisen Sie Ihre Antwort.

1. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x < y$.
2. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x^2 = y^2$.
3. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod 3$.
4. $\sim$ auf $\{a, b\}^*$ mit $x \sim y \iff |x| = |y|$.
5. $\sim$ auf $\{a, b\}^*$ mit $x \sim y \iff x$ ist Teilwort von y.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe):
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S und x ein beliebiges Element aus S, dann heißt

$$[x]_\sim := \{y \in S \mid x \sim y\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich $\sim$. Die Menge

$$S/{\sim} := \{[x]_\sim \mid x \in S\}$$

aller Äquivalenzklassen heißt *Quotientenmenge* oder *Faktormenge* und bildet eine *Partition* von S, d. h. jedes Element aus S ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Die Mächtigkeit $|S/{\sim}|$ wird *Index* von $\sim$ genannt und gelegentlich mit Index($\sim$) notiert.

Geben Sie die Quotientenmenge sowie den Index der folgenden Äquivalenzrelationen an.

1. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x^2 = y^2$.
2. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod 3$.
3. $\sim$ auf $\{a, b\}^*$ mit $x \sim y \iff |x| = |y|$.

Aufgabe 5 (Präsenzaufgabe):
Seien $\sim$ und $\sim'$ zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge S. $\sim'$ ist eine *Verfeinerung* von $\sim$, wenn gilt:

$$\forall x, y \in S \colon x \sim' y \implies x \sim y.$$

In diesem Fall ist jede Äquivalenzklasse bezüglich $\sim'$ Teilmenge einer Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$.

Geben Sie zu jeder der folgenden Äquivalenzrelationen $\sim$ eine Verfeinerung $\sim'$ an, die weder die Gleichheitsrelation noch $\sim$ selber ist.

1. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod 3$.
2. $\sim$ auf $\{a, b\}^*$ mit $x \sim y \iff |x| = |y|$.

Aufgabe 6:
Sei $(S, \circ)$ ein Monoid. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf S heißt *Kongruenzrelation* auf $(S, \circ)$, wenn gilt:

$$\forall x, x', y, y' \in S \colon (x \sim x' \wedge y \sim y') \implies x \circ y \sim x' \circ y'.$$

Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(S, \circ)$, dann ist $\bullet$ mit

$$[x]_\sim \bullet [y]_\sim = [x \circ y]_\sim$$

eine wohldefinierte Verknüpfung, die zusammen mit $S/{\sim}$ ein Monoid bildet, das sogenannte *Quotientenmonoid* $(S/{\sim}, \bullet)$.

Welche der folgenden Äquivalenzrelationen sind auch Kongruenzrelationen? Beweisen Sie Ihre Antwort. Geben Sie außerdem für jede Kongruenzrelation ein 3×3-Fragment der Verknüpfungstafel des Quotientenmonoids an.

1. $\sim$ auf $(\mathbb{Z}, +)$ mit $x \sim y \iff x^2 = y^2$.
2. $\sim$ auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ mit $x \sim y \iff x^2 = y^2$.

Zusatzaufgaben:

3. $\sim$ auf $(\{a, b\}^*, \cdot)$ mit $x \sim y \iff |x| = |y|$.
4. $\sim$ auf $(\mathbb{Z}, +)$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod 3$.
5. $\sim$ auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod 3$.

Hinweise:

- Oft benutzt man für $\circ$ und $\bullet$ dasselbe Symbol, obwohl das formal zwei verschiedene Verknüpfungen sind.
- Kongruenzrelationen können auch für Magmen, Halbgruppen und Gruppen definiert werden. Die entstehende Struktur $(S/{\sim}, \bullet)$ wird dann entsprechend *Quotientenmagma*, *-halbgruppe* oder *-gruppe* genannt.

Aufgabe 7 (Knobelaufgabe):
Seien Σ ein Alphabet, $\cdot$ die Konkatenation von Wörtern und $\sim$ eine binäre Relation auf Σ^* mit

$$x \sim y \iff \exists u \in \Sigma^* \colon xu = uy.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$?