Ergänzung 7

Erinnerung: In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. In der Vorlesung verwenden wir die erste.

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe):
Für ein Alphabet Σ, eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und einen beliebigen Buchstaben $a \in \Sigma$ definieren wir

$$\mathrm{push}_a(L) = \{wa \mid w \in L\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{pop}_a(L) = \{w \mid wa \in L\}\,.$$

1. Geben Sie $\mathrm{push}_b(L)$ und $\mathrm{pop}_a(L)$ für $L = \{\varepsilon, a, aa, ab, aba\}$ explizit an.
2. Welche Inklusionsbeziehungen gibt es zwischen $\mathrm{push}_a(\mathrm{pop}_a(L))$, $\mathrm{pop}_a(\mathrm{push}_a(L))$ und L? Beweisen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie, dass die Menge der regulären Sprachen unter push_a- und pop_a-Operationen abgeschlossen ist, d. h. zeigen Sie für jede Sprache L:
   (a) L regulär $\Longrightarrow$ $\mathrm{push}_a(L)$ regulär
   (b) L regulär $\Longrightarrow$ $\mathrm{pop}_a(L)$ regulär

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe):
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Myhill und Nerode, dass

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

nicht regulär ist.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe):
Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Geben Sie die Quotientenmenge und den Index der syntaktischen Kongruenz $\equiv_L$ an.
2. Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel des syntaktischen Monoids $\mathrm{Synt}(L)$.
3. Warum ist die auf Folie 16.4 definierte Funktion $\varphi\colon \Sigma^* \to \Sigma^*/{\equiv_L}$ mit $\varphi(w) = [w]_{\equiv_L}$ ein Monoidhomomorphismus?
4. Begründen Sie, warum L von $\mathrm{Synt}(L)$ erkannt wird.
5. Geben Sie die Quotientenmenge und den Index der Myhill-Nerode-Relation R_L an.
6. Zeichnen Sie den auf Folie 14.4 definierten minimalen DEA M für L.

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe):
Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$ und welche sind Kongruenzrelationen auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$?

Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $x \sim y \iff y - x$ ist ein Vielfaches von 3
2. $x \sim y \iff |y - x| \leq 2$
3. $x \sim y \iff \exists m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \colon x^m = y^n$

Hinweis: Eine Zahl $z \in \mathbb{Z}$ heißt *Vielfaches* von $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wenn gilt:

$$\exists k \in \mathbb{Z} \colon z = kn.$$

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe):
Zeigen Sie, dass die syntaktische Kongruenz $\equiv_L$ mit

$$x \equiv_L y \iff \forall u, v \in \Sigma^* \colon (uxv \in L \iff uyv \in L)$$

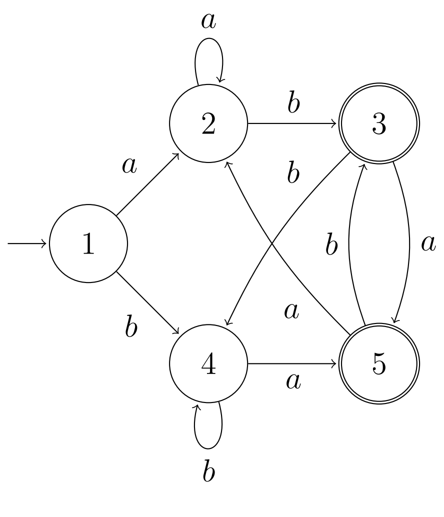
für jede Sprache L über einem Alphabet Σ eine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.

Was bedeutet das für $\mathrm{Synt}(L)$?

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe):
Sei Σ ein Alphabet. Für zwei Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$ definieren wir den *Rechtsquotienten* $A^{-1}B$ wie folgt:

$$A^{-1}B = \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in A \colon uv \in B\}.$$

1. Bestimmen Sie $A^{-1}B$ für $A = \{aa, ab, abb\}$ und $B = \{\varepsilon, a, ab, aaa, aba, bbb, aabb, abba\}$.
2. Sei M der folgende DEA:



   Geben Sie einen endlichen Automaten (DEA oder NEA) für $\{a, bb, aba\}^{-1}\, T(M)$ an.
3. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A und B: Ist B regulär, dann ist auch $A^{-1}B$ regulär.

Aufgabe 7 (Knobelaufgabe):
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen und A, B zwei endliche Sprachen mit $|A| = m$ und $|B| = n$. Bekanntlich ist mn ist eine *obere Schranke* für $|AB|$, d. h. es gilt $|AB| \leq mn$. Sie ist außerdem *scharf*, weil für alle $m, n \in \mathbb{N}$ Sprachen A, B existieren mit $|AB| = mn$, z. B. $A = \left\{a^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq m\right\}$ und $B = \left\{b^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq n\right\}$.

Geben Sie eine scharfe untere Schranke $s(m, n)$ für $|AB|$ an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Hinweise:

- Eine Fallunterscheidung der Form

$$s(m,n) = \begin{cases} s_1(m,n) & \text{für } m = 0 \text{ oder } n = 0 \\ s_2(m,n) & \text{für } m, n > 0 \end{cases}$$

  könnte für geeignete s_1, s_2 hilfreich sein.

- Betrachten Sie für $m, n > 0$ die Menge $\{u\}B \cup A\{v\}$ mit u ein Wort minimaler Länge aus A und v ein Wort maximaler Länge aus B.